Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Colegiado do Curso de Matemática - COLMAT
Monografia de Graduação

Convergência em Variação Total de Cadeias de Markov

Diogo Soares Dórea da Silva

Salvador-Bahia
Abril de 2013

Convergência em Variação Total de Cadeias de Markov

Diogo Soares Dórea da Silva

Monografia de Graduação apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco.

Salvador-Bahia
Abril de 2013

Silva, Diogo Soares Dórea da.
Convergência em Variação Total de Cadeias de Markov / Diogo Soares Dórea da Silva. – Salvador, 2013.
47 páginas. 3 figuras.
Orientador: Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco.
Monografia (graduação) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Colegiado do Curso de Matemática, 2013.
Referências bibliográficas.
1. Processos markovianos. I. Franco, Tertuliano Franco Santos. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.
CDD : 519.2

Convergência em Variação Total de Cadeias de Markov

Diogo Soares Dórea da Silva

Monografia de Graduação apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática, aprovada em 12 de abril de 2013.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas
UFBA

Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva
UFBA

Dedico este trabalho
à toda minha família,
e a Helen

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, aos meus pais. Minha mãe pelo carinho, amor, incentivo, preocupação e confiança depositada em mim, que possibilitaram o melhor para meus estudos. Meu pai pelo amor, lições, incentivo, atenção e os ensinamentos em Matemática, que me induziram a apreciar essa ciência. Agradeço à minha irmã pelo amor, companhia e amizade, mesmo estando longe. Agradeço às minhas avós, tios, tias, primos e primas pelo amor, atenção, carinho e ajuda nesta caminhada. Enfim, à minha família, pela fortaleza que representa para mim.

Agradeço demais à minha namorada e grande companheira, Helen, pelos momentos de amor, carinho, compreensão, atenção, alegria e diversão nestes últimos anos. Pois, sem a presença dela, seria tudo muito mais difícil nesta jornada, já que foi uma referência para mim, em todos os momentos. Assim sendo, tenho que agradecer também pela família de Helen, pela receptividade, preocupação, amor e momentos de descontração.

Agradeço a todos os meus amigos de Feira de Santana, pela companhia e amizade.

Agradeço a Lucas, pela amizade na UFBA, e os constantes momentos de alegria vividos.

Agradeço ao Professor Alécio, pela dedicação, empenho e amor no ensino da Matemática, que me fez aumentar o gosto pela Matemática.

Agradeço às Professoras Rita, Simone e Ana Lucia, pela preocupação, atenção, disponibilidade e ajudas, buscando sempre o melhor na minha vida acadêmica.

Agradeço ao Professor Samuel Gomes, pelas orientações bastante úteis e pertinentes para a confecção deste trabalho.

Por fim, agradeço demais ao Professor Tertuliano, pela atenção, disponibilidade, profissionalismo, dedicação extrema, paciência e oportunidade de fazer este trabalho. Com certeza, foi um aprendizado enorme desenvolver com ele, neste último ano, um projeto de monografia.

"Uma probabilidade razoável é a única certeza."

Samuel Howe

Resumo

Este trabalho aborda o tema de cadeias de Markov em tempo discreto e espaço de estados finito, contendo exemplos concretos que podem ser modelados por tais processos estocásticos. Apresentamos as noções e algumas aplicações de distância em variação total entre distribuições de probabilidade, acoplamento de distribuições de probabilidade e tempos de mistura. Por fim, exibimos e demonstramos, de duas maneiras distintas, o Teorema da Convergência em Variação Total de Cadeias de Markov.

Palavras-chave: Probabilidade, Cadeias de Markov e Convergência em Variação Total.

Abstract

This work is concerned with the subject of Markov chains on discrete time and finite state space, containing concrete examples that can be modeled by such stochastic processes. We present the concepts and some applications of the total variation distance between probability distributions, the coupling of probability distributions and mixing times. Finally, we exhibit and demonstrate, in two distinct ways, the Convergence Theorem in Total Variation of Markov Chains.

Keywords: Probability, Markov Chains and Convergence in Total Variation.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

O principal objetivo desta monografia é apresentar o Teorema de Convergência em Variação Total de Cadeias de Markov. Para tal, foram introduzidos alguns conceitos necessários para o entendimento deste teorema. Concomitantemente, foram dados alguns exemplos práticos de cadeias de Markov para tornar mais inteligível a compreensão de alguns conceitos, além de trazer este estudo à realidade, mostrando algumas aplicações.

Cadeias de Markov são processos regidos por eventos aleatórios, em que a cada tempo um elemento da cadeia é escolhido, de que forma que somente o estado atual é relevante para a predição do estado seguinte. Esta última propriedade é também chamada propriedade markoviana, em homenagem ao matemático russo Andrei Andreyevich Markov (1856-1922). O estudo de cadeias de Markov atinge, atualmente, uma quantidade considerável de áreas da ciência, tais como Física (Termodinâmica e Mecânica Estatística), Economia, Meteorologia, Biologia (Epidemiologia e Dinâmica de Populações), dentre tantas outras.

Os elementos de uma cadeia de Markov, também chamados de estados, formam um conjunto discreto, chamado espaço de estados da cadeia de Markov. Este conjunto pode ser finito ou não, porém este trabalho trata somente cadeias com espaço de estados finito, com uma única exceção. O tempo, que é o parâmetro utilizado para reger a mudança de estados, pode ser discreto ou contínuo, sendo que nesta monografia só é abordado o caso discreto.

O Teorema da Convergência diz que, com o passar do tempo, a probabilidade de cada estado de uma cadeia de Markov que possui alguns pré-requisitos (aperiodicidade e irredutibilidade) ser o estado atual converge para um certo valor. A ideia de convergência está atrelada à métrica de distância em variação total entre duas distribuições de probabilidade e distribuições estacionárias, conceitos que são devidamente expostos neste trabalho.

Sendo assim, é necessário o entendimento, por parte do leitor, de algumas definições e propriedades vistas nos capítulos precedentes ao teorema, além de conhecimentos básicos em Probabilidade, Teoria dos Números, Álgebra Linear e Análise.

A parte teórica do presente trabalho está dividida em quatro capítulos: do segundo ao quinto capítulo.

No segundo capítulo, introduzimos algumas definições, como cadeia de Markov, matriz de transição de uma cadeia, distribuição estacionária e classificações de cadeias de Markov. Todas essas definições, e mais um resultado visto ainda neste capítulo, são cruciais para a compreensão do teorema final, e consequentemente, de todo o trabalho.

No terceiro capítulo são trazidos alguns exemplos de cadeias de Markov, com destaque ao Problema da Ruína do Jogador com Viés e ao Problema do Colecionador de Figurinhas. Tais modelos se sobressaem pela semelhança com eventos cotidianos. Ainda neste capítulo, encontramos alguns resultados referentes a cada um dos exemplos mostrados, sendo que um destes resultados refere-se a um problema que mescla dois dos modelos vistos.

O quarto capítulo é voltado para dar as últimas bases necessárias para o entendimento do Teorema da Convergência em Variação Total. A definição de distância em variação total e suas caracterizações são suficientes para a compreensão da primeira prova dada para este teorema. Contudo, ainda é visto o conceito (e alguns resultados) de acoplamento entre duas distribuições de probabilidade, que dá embasamento para a compreensão da segunda prova do teorema. O capítulo culmina com a definição de tempo de mistura e algumas de suas aplicações usando acoplamentos em cadeias de Markov vistas no terceiro capítulo.

O quinto capítulo traz o enunciado e duas provas diferentes do Teorema da Convergência em Variação Total. A primeira, mais engenhosa, requerendo conhecimentos básicos de operações com matrizes e vetores e indução matemática, além de resultados vistos no segundo capítulo. A segunda demonstração é bastante curta e elegante, necessitando, além dos resultados vistos no segundo capítulo, apenas da noção de acoplamento e alguns resultados subsequentes vistos no quarto capítulo.

Capítulo 2

Cadeias de Markov: definições e fatos básicos

2.1 Definições e motivações

Definição 2.1. *Uma cadeia de Markov com espaço de estados Ω é um processo estocástico (uma sequência de elementos escolhidos com certas regras aleatórias) que a cada tempo um elemento (chamado de estado) de Ω é escolhido seguindo uma distribuição de probabilidade que só depende do estado imediatamente anterior. Em outras palavras, se o estado atual é um x, com $x \in \Omega$, o próximo estado será determinado pela distribuição $P(x, \cdot)$, que é fixa para cada elemento de Ω. Matematicamente, estamos assumindo que*

$$\mathbb{P}\left\{X_{t+1} = y \mid H_{t-1} \cap \{X_t = x\}\right\} = \mathbb{P}\left\{X_{t+1} = y \mid X_t = x\right\} = P(x, y),$$

onde $H_{t-1} = \bigcap_{s=0}^{t-1} \{X_s = x_s\}$ denota qualquer possível realização $(x_0, x_1, ..., x_{t-1})$ tal que $\mathbb{P}\left\{H_{t-1} \cap \{X_t = x\}\right\} > 0$.

A propriedade que nos dá a distribuição do estado seguinte, sabendo-se apenas o estado atual, é conhecida como "perda de memória", ou propriedade de Markov.

Este trabalho aborda somente cadeias de Markov finitas (com Ω finito), com a única exceção do passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$. O tempo utilizado será discreto, representado pelo conjunto $\mathbb{N}$.

Definição 2.2. *Uma matriz de transição P de uma cadeia de Markov com espaço de estados Ω é definida como $P_{ij} = P(i, j), \forall i, j \in \Omega$, e indica, como mostra a propriedade de Markov, a probabilidade de passarmos do estado i para o estado j em um único passo (mudança de estado).*

Como consequência da Definição 2.2, tem-se que a x-ésima linha de P é a distribuição $P(x, \cdot)$. Além disso, P é uma matriz estocástica, ou seja, possui somente entradas não-negativas, e

$$\sum_{y \in \Omega} P(x, y) = 1, \forall x \in \Omega,$$

já que as somas das probabilidades de sair do estado x fixado, para qualquer outro estado em Ω (inclusive o estado x) deve ser 1.

Com a matriz de transição de uma cadeia de Markov qualquer, sabemos a probabilidade de partirmos de um estado x e chegarmos no estado y, no tempo $t = 2$. Para isso, devemos calcular $\sum_{k \in \Omega} P(x, k) \cdot P(k, y)$, que é a soma sobre todas a possibilidades de ir de x a y em dois passos. Mas isto é equivalente a encontrar o termo $P^2_{x,y} = P^2(x, y)$. Portanto, para obtermos a probabilidade de, após um tempo t, passarmos do estado x ao y, basta encontrarmos $P^t_{x,y} = P^t(x, y)$.

Conseguimos, com este recurso algébrico, reduzir alguns problemas de Probabilidade ao estudo de matrizes de transição. Alguns problemas que abordam fenômenos que dependem do tempo podem ser modelados por cadeias de Markov. Muitos exemplos (alguns bastante lúdicos e concretos) serão abordados no cápitulo seguinte.

2.2 Representação através da função de mapeamento aleatório

Definição 2.3. *Uma função de mapeamento aleatório de uma matriz de transição P, com espaço de estados Ω, é uma função $f : \Omega \times \Lambda \to \Omega$, tal que*

$$\mathbb{P}\{f(x, Z) = y\} = P(x, y),$$

onde Z é uma variável aleatória tomando valores em $\Lambda \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{P}$ é a probabilidade associada à variável aleatória Z, e $x, y \in \Omega$.

A função de mapeamento aleatório é uma maneira prática para construir cadeias de Markov, sendo também útil em demonstrações.

Proposição 2.1. *Qualquer matriz de transição em um espaço de estados finito possui uma função de mapeamento aleatório.*

Demonstração. Seja $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ espaço de estados finito. Criaremos uma função de mapeamento aleatório correspondente à cadeia de Markov em Ω com matriz de transição P. Tome $\Lambda = (0, 1]$. Escolhendo Z_i uniformemente em Λ, e definindo $F_{j,k} = \sum_{i=1}^{k} P(x_j, x_i)$ como uma função de distribuição acumulada de $P(x_j, \cdot)$, definimos convenientemente

$$f(x_j, z) := x_k, \quad para \quad F_{j,k-1} < z \leq F_{j,k}.$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{f(x_j, Z) = x_k\right\} &= \mathbb{P}\left\{F_{j,k-1} < Z \leq F_{j,k}\right\} \\
&= \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{k-1} P(x_j, x_i) < Z \leq \sum_{i=1}^{k} P(x_j, x_i)\right\} = P(x_j, x_k).
\end{aligned}$$

□

2.3 Classificação de estados e cadeias de Markov

Definição 2.4. *Sejam x e y estados de Ω. Dizemos que x é alcançável a partir de y (escrevemos $y \to x$) se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P^n(y, x) > 0$. Se x é alcançável a partir de y e y é alcançável a partir de x, dizemos que x e y são comunicantes, e escrevemos $x \leftrightarrow y$.*

Definição 2.5. *Sendo $x \in \Omega$, dizemos que x é um estado absorvente se $P(x, x) = 1$. Neste caso, se a cadeia chegar alguma vez no estado x, nunca sairá dele.*

Definição 2.6. *Uma cadeia de Markov P com estados em Ω é dita irredutível, se $\forall x, y \in \Omega$, temos $x \leftrightarrow y$. Ou seja, para quaisquer dois estados $x, y \in \Omega$, existe um inteiro não-negativo t (que pode depender de x e y), tal que $P^t(x, y) > 0$. Caso contrário, dizemos que P é redutível.*

Definição 2.7. *O conjunto $\tau(x) := \{t \geq 1 : P^t(x, x) > 0\}$ é o conjunto de tempos de retorno de x, e indica os tempos t tais que é possível sair do estado x, e retornar a ele próprio exatamente um tempo t depois. Chamamos de período do estado x o MDC dos tempos de retorno de x, ou seja, $MDC(\tau(x))$.*

Definição 2.8. *Diz-se que uma cadeia de Markov P com espaço de estados Ω é aperiódica se, para todo $x \in \Omega$, x possui período 1. Caso contrário, diz-se que P é periódica.*

As definições acima de aperiodicidade e irredutibilidade e a Proposição 2.2, que será enunciada abaixo, são fundamentais para a compreensão e prova do Teorema da Convergência.

Lema 2.1. *Se P é uma cadeia de Markov irredutível, com espaço de estados Ω, então $MDC(\tau(x)) = MDC(\tau(y)), \forall x, y \in \Omega$.*

Demonstração. De fato, fixando x e y dois estados em Ω, a irredutibilidade de P garante que existem inteiros não-negativos r e l tais que $P^r(x,y) > 0$ e $P^l(y,x) > 0$. Sendo $m = r + l$, temos que $P^m(x,x) = P^{r+l}(x,x) \geq P^r(x,y) \cdot P^l(y,x) > 0$, e, analogamente, $P^m(y,y) = P^{r+l}(y,y) \geq P^l(y,x) \cdot P^r(x,y) > 0$ (as primeiras desigualdades de ambas expressões indicam que para retornar a x, m passos após ter saído deste estado, a cadeia não deva necessariamente passar em y um tempo r depois, valendo o análogo para o estado y). Portanto, $m \in \tau(x) \cap \tau(y)$. Seja k um inteiro não-negativo tal que $k \in \tau(x)$. Assim, como $P^k(x,x) > 0$, segue que $P^{k+m}(y,y) = P^{l+k+r}(y,y) \geq P^l(y,x) \cdot P^k(x,x) \cdot P^r(x,y) > 0$. Daí, $k + m \in \tau(y)$, ou seja, $k \in \tau(y) - m \Rightarrow \tau(x) \subset \tau(y) - m$. Seja a um inteiro não-negativo, tal que $a \in \tau(x)$. Logo, $a = b - m$, para algum $b \in \tau(y)$. Com isso, $MDC(\tau(y))|b$, o que implica que $MDC(\tau(y))|a + m$, e portanto, $MDC(\tau(y))|a$, pois é sabido que $MDC(\tau(y))|m$. Prova-se, assim que $MDC(\tau(y))$ divide todos os elementos de $\tau(x)$, o que implica que $MDC(\tau(y)) \leq MDC(\tau(x))$. Por um argumento inteiramente análogo, obtemos $MDC(\tau(x)) \leq MDC(\tau(y))$, provando o lema. □

Proposição 2.2. *Se P é uma cadeia de Markov irredutível e aperiódica, com espaço de estados Ω, então existe um inteiro não-negativo r tal que $P^r(x,y) > 0$, para todo $x, y \in \Omega$.*

Em outras palavras, a matriz P^r não possuirá nenhuma entrada nula para algum r não-negativo.

Demonstração. Nesta demonstração, usaremos o seguinte fato de Teoria dos Números: qualquer conjunto de inteiros não-negativos, fechado para a adição, cujo MDC dos seus elementos é 1, deve conter todos os inteiros não-negativos, exceto uma quantidade finita deles (para uma prova deste fato, ver [Y. Peres], na página 20). Como $x \in \Omega$, e P é aperiódica, tem-se que $MDC(\tau(x)) = 1$. Sabe-se que $\tau(x)$ é fechado para a adição, pois se $s, t \in \tau(x)$, temos que $P^s(x,x) > 0$ e $P^t(x,x) > 0$, e, portanto, $P^{s+t}(x,x) \geq P^s(x,x) \cdot P^t(x,x) > 0$. Daí, $s + t \in \tau(x)$. Pelo fato inicialmente citado, existe $q(x)$ tal que $q \geq q(x) \Rightarrow q \in \tau(x)$. Pela irredutibilidade da cadeia, para qualquer $y \in \Omega$, existe um inteiro não-negativo $r = r(x,y)$, tal que $P^r(x,y) > 0$. Logo, para $q \geq q(x) + r$, temos

$$P^q(x,y) \geq P^{q-r}(x,x) \cdot P^r(x,y) > 0,$$

visto que $q - r \geq q(x) \Rightarrow q - r \in \tau(x)$. Assim, para todo $q \geq q(x) + r$, $P^q(x, y) > 0$. Logo, sendo $q'(x) := q(x) + \max_{y \in \Omega} r(x, y)$, tem-se claramente, que $P^q(x, y) > 0, \forall q \geq q'(x), \forall y \in \Omega$. Como o elemento x é fixo, para garantir a validade da proposição para todos $x, y \in \Omega$, fazemos $q \geq \max_{x \in \Omega} q'(x)$, mostrando, por construção, que $P^q(x, y) > 0, \forall x, y \in \Omega$. □

Afirmação 2.1. *Seja P uma cadeia de Markov irredutível, e seja r o menor inteiro não-negativo tal que $P^r(x, y) > 0$, para todo $x, y \in \Omega$. Então, para todo m inteiro tal que $m \geq r$, temos que $P^m(x, y) > 0$, para todo $x, y \in \Omega$.*

De fato, se $P^r(x, y) > 0$, temos que todas as entradas da matriz P^r são positivas. Pelo fato de P ser estocástica, pelo menos um elemento de cada linha é não-nulo. Logo, temos que $P^{r+1} = P \cdot P^r$ é uma matriz que também possuirá somente entradas positivas. Indutivamente, temos que $P^m(x, y) > 0, \forall m \geq r$.

2.4 Distribuições estacionárias

Definição 2.9. *Seja P uma cadeia de Markov em Ω, e π uma distribuição também em Ω. Se π satisfaz a igualdade*

$$\pi = \pi P,$$

dizemos que π é uma distribuição estacionária de P.

É notório que o vetor π é auto-vetor à esquerda da matriz de transição P. A importância de se conhecer este vetor é conhecer uma distribuição que é invariante em P com o tempo. Posteriormente, será visto, no Teorema da Convergência, que toda cadeia de Markov irredutível e aperiódica tem distribuição que se aproxima da distribuição estacionária. A noção de distância entre distribuições será definida no Capítulo 4.

Proposição 2.3. *Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov irredutível. Então, existe distribuição de probabilidade π em Ω tal que $\pi = \pi P$, e $\pi(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$.*

A prova de existência será omitida, podendo ser encontrada em [Y. Peres], página 12. Contudo, é simples provar que, caso exista a distribuição π, $\pi(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$: basta notar que se $\pi(x) = 0$, como $\pi(x) = \sum_{y \in \Omega} \pi(y) \cdot P(y, x)$, temos que ter $\pi(y) = 0$, para todo y tal que $P(y, x) > 0$. Como P é irredutível, conseguimos estender este procedimento a todos os elementos de Ω, obtendo $\pi(q) = 0$, para todo $q \in \Omega$, o que seria um absurdo, já que qualquer distribuição de probabilidade deve ter o valor 1 como soma dos elementos.

Proposição 2.4. *Seja P uma cadeia de Markov irredutível, com espaço de estados Ω. Então, a distribuição estacionária de P é única.*

Demonstração. Pela Proposição 2.3, garantimos que P possui ao menos uma distribuição estacionária. Suponhamos que existam mais de uma distribuições estacionárias, e que π_1 e π_2 sejam duas delas. Se existe C constante real tal que $\frac{\pi_1(x)}{\pi_2(x)} = C$, para todo $x \in \Omega$, então $\pi_1 = \pi_2$. Supondo que $\frac{\pi_1(x)}{\pi_2(x)}$ não é constante, temos que existem $x \in \Omega$ que minimiza $\frac{\pi_1(x)}{\pi_2(x)}$ e $w \in \Omega$ tal que $P(w, x) > 0$ e $\frac{\pi_1(x)}{\pi_2(x)} < \frac{\pi_1(w)}{\pi_2(w)}$. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
\pi_1(x) = \sum_{y\in\Omega} \pi_1(y) \cdot P(y,x) &= \sum_{y\in\Omega} \frac{\pi_1(y)}{\pi_2(y)} \cdot \pi_2(y) \cdot P(y,x) \\
&> \sum_{y\in\Omega} \frac{\pi_1(x)}{\pi_2(x)} \cdot \pi_2(y) \cdot P(y,x) \\
&= \frac{\pi_1(x)}{\pi_2(x)} \sum_{y\in\Omega} \pi_2(y) \cdot P(y,x) \\
&= \pi_1(x),
\end{aligned}
$$

gerando uma contradição. A primeira e a última igualdades usam a hipótese de π_1 e π_2 serem distribuições estacionárias. A segunda utiliza o fato de π_2 ter todas as entradas positivas, visto na Proposição 2.3. A desigualdade estrita é explicada pela existência do elemento w, vista no começo da prova.

□

2.5 Reversibilidade e tempo reverso

Definição 2.10. *Uma cadeia de Markov P com espaço de estados Ω, em que, para alguma distribuição π em Ω, satisfaça*

$$
\pi(x) \cdot P(x,y) = \pi(y) \cdot P(y,x), \quad \forall x, y \in \Omega, \tag{2.1}
$$

é chamada de reversível.
A equação (2.1) *é conhecida como equação detalhada de balanço.*

Proposição 2.5. *Seja P uma cadeia de Markov com espaço de estados Ω. Qualquer distribuição π que, com P, satisfaça as equações detalhadas de balanço, é uma distribuição estacionária de P.*

Demonstração. Somando ambos os lados da igualdade, para todo $y \in \Omega$, temos

$$\sum_{y\in\Omega} \pi(y) \cdot P(y,x) = \sum_{y\in\Omega} \pi(x) \cdot P(x,y) = \pi(x) \cdot \sum_{y\in\Omega} P(x,y) = \pi(x),$$

já que P é estocástica. □

Definição 2.11. *Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov irredutível, com distribuição estacionária π. A cadeia de Markov em tempo reverso de P é dada pela matriz de transição*

$$\hat{P}(x,y) := \frac{\pi(y) \cdot P(y,x)}{\pi(x)}.$$

A cadeia de Markov em tempo reverso pode ser entendida como a matriz que nos fornece probabilidades iguais para uma trajetória e sua trajetória reversa (ou invertida).

A matriz $\hat{P}$ é estocástica. De fato,

$$\sum_{y\in\Omega} \hat{P}(x,y) = \sum_{y\in\Omega} \frac{\pi(y) \cdot P(y,x)}{\pi(x)} = \frac{1}{\pi(x)} \cdot \sum_{y\in\Omega} \pi(y) \cdot P(y,x) = \frac{1}{\pi(x)} \cdot \pi(x) = 1.$$

A penúltima igualdade é devida ao fato de π ser distribuição estacionária, e como foi provado anteriormente, um vetor estacionário de uma irredutível possui somente entradas positivas.

Além disso, se P é reversível com espaço de estados Ω, é imediato que $P = \hat{P}$:

$$P(x,y) = \frac{\pi(y) \cdot P(y,x)}{\pi(x)} := \hat{P}(x,y), \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Proposição 2.6. *Seja (X_t) uma cadeia de Markov irredutível em Ω, com matriz de transição P, e distribuição estacionária π, e seja $(\hat{X}_t)$ a cadeia de Markov com matriz de transição $\hat{P}$. Então π é estacionário para $\hat{P}$, e para quaisquer $x_0, x_1, ..., x_t \in \Omega$, temos*

$$\pi(x_0) \cdot P(x_0,x_1) \cdot P(x_1,x_2) \cdots P(x_{n-1},x_n) = \pi(x_n) \cdot \hat{P}(x_n,x_{n-1}) \cdots \hat{P}(x_2,x_1) \cdot \hat{P}(x_1,x_0).$$

Demonstração. Para provar que π é estacionário para $\hat{P}$, escrevemos

$$\sum_{y\in\Omega} \pi(y)\cdot\hat{P}(y,x) = \sum_{y\in\Omega} \pi(y)\frac{\pi(x)\cdot P(x,y)}{\pi(y)} = \pi(x)\cdot\sum_{y\in\Omega} P(x,y) = \pi(x).$$

A primeira igualdade advém da definição de tempo reverso, e a última vem do fato de P ser estocástica.
Para provar o segundo fato, escrevemos

$$\pi(x_0)\cdot P(x_0,x_1)\cdots P(x_{n-1},x_n)$$

como

$$\frac{\pi(x_0)\cdot P(x_0,x_1)}{\pi(x_1)}\cdot\frac{\pi(x_1)\cdot P(x_1,x_2)}{\pi(x_2)}\cdots\frac{\pi(x_{n-1})\cdot P(x_{n-1},x_n)}{\pi(x_n)}\cdot\pi(x_n),$$

em que nesta passagem, somente multiplicamos os numeradores e denominadores por $\prod_{i=1}^{n}\pi(x_i)$, e reagrupamos. Assim, pela definição de $\hat{P}$, temos

$$\pi(x_0)\cdot P(x_0,x_1)\cdots P(x_{n-1},x_n) = \hat{P}(x_1,x_0)\cdot\hat{P}(x_2,x_1)\cdots\hat{P}(x_n,x_{n-1})\cdot\pi(x_n),$$

como queríamos provar. □

Esta proposição nos fornece uma igualdade bastante notável: qualquer trajetória em uma cadeia de Markov P, que inicia em uma distribuição estacionária π possui a mesma probabilidade de ocorrer que a trajetória reversa (uma trajetória que inicia onde a outra trajetória terminou, e vice-versa) em uma cadeia de Markov $\hat{P}$, iniciada com a mesma distribuição estacionária π. Observe que $\pi(x_0)$ e $\pi(x_n)$ indicam a probabilidade de a cadeia começar em x_0 e x_n, respectivamente.

Capítulo 3

Exemplos de cadeias de Markov

3.1 Exemplos de cadeias de Markov por classificação

Como foi visto na Seção 2.3, podemos classificar as cadeias quanto à redutibilidade (redutível ou irredutível) e quanto à periodicidade (periódica ou aperiódica). Veremos exemplos ilustrativos de cadeias de Markov que se enquadram em cada uma das classificações acima.

3.1.1 Passeios aleatórios no n-ciclo (cadeias irredutíveis periódicas e aperiódicas)

Um passeio aleatório no n-ciclo é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\Omega = \mathbb{Z}_n = \{0, 1, ..., n-1\}$ (sistema completo de restos módulo n), e é representado pela matriz de transição

$$P(j,k) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se} \quad k \equiv j+1 (mod\ n), \\ \frac{1}{2}, & \text{se} \quad k \equiv j-1 (mod\ n), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em outras palavras, a cada passo, passamos de um estado a qualquer um dos dois estados adjacentes a ele com igual probabilidade. Além disso, essas são as únicas possibilidades de movimento, ou seja, para $x, y \in \Omega$, $P(x,y) > 0$ somente para os estados $y \equiv x+1(mod\ n)$ e $y \equiv x-1(mod\ n)$.

Qualquer passeio aleatório no n-ciclo é irredutível. De fato, temos que para quaisquer $x, y \in \Omega$ (com $x \neq y$),

$$P^r(x, y) \geq \frac{1}{2^r} > 0, \tag{3.1}$$

em que $r \equiv |x - y|$ $(mod\ n)$ é a distância entre x e y, percorrendo somente o sentido anti-horário ou somente o sentido horário.

A primeira desigualdade de (3.1) se justifica pelo fato de que há o caso particular em que $|x - y| = \frac{n}{2}$, ou seja, x e y são diametralmente opostos, e podemos, em r passos, sair de x e chegar em y tanto pelo sentido horário quanto pelo sentido anti-horário.

Apesar de todos os passeios aleatórios no n-ciclo se comportarem igualmente quanto à redutibilidade, quanto à periodicidade não ocorre o mesmo.

Figura 3.1: A primeira imagem ilustra o passeio aleatório em $\mathbb{Z}_{10}$, que é periódico. A segunda imagem representa o passeio aleatório aperiódico em $\mathbb{Z}_9$.

Afirmação 3.1. *Se n é ímpar, temos que o n-ciclo é uma cadeia aperiódica, enquanto que se n for par, temos o n-ciclo como uma cadeia periódica.*

O primeiro fato é facilmente observado: tome $x \in \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$, com n ímpar. Saindo de x, podemos voltar para x em exatamente dois passos: é só tomarmos o sentido horário no primeiro passo e depois o anti-horário no segundo passo (ou o contrário). Além disso, saindo de x, e andando n passos somente no sentido horário (ou somente no anti-horário), retornamos a x. Como $MDC(2, n) = 1$, já que n é ímpar, temos $MDC(\tau(x)) = 1$, ou seja, a cadeia é aperiódica (já que isto ocorrerá para todo $x \in \Omega$).

O segundo fato pode ser entendido melhor através da Figura 3.1. Quando n é par, conseguimos colorir os estados do n-ciclo de forma alternada (cores branca e preta). Assim, se o estado atual é de cor branca, o estado seguinte é de cor preta, e vice-versa. Com isso, temos que se $x \in \Omega$,

$\tau(x) = \{2, 4, 6, ...\}$, ou seja, $MDC(\tau(x)) = 2$. Daí, conclui-se que, se n é par, o passeio aleatório no n-ciclo é dado por uma cadeia de Markov periódica.

3.1.2 Exemplo de cadeia de Markov redutível

Afirmação 3.2. *Uma cadeia de Markov P com espaço de estados Ω, com $|\Omega| \geq 2$, e algum estado $x \in \Omega$ absorvente, é redutível.*

De fato, se $x \in \Omega$ é absorvente, temos que $P(x, x) = 1$. Assim, é claro que para todo $k \in \Omega$ tal que $k \neq x$, $P(x, k) = 0$. Logo, para todo r natural, tal que $r \geq 1$, temos

$$P^r(x, x) = \sum_{k \in \Omega} P^{r-1}(x, k) \cdot P(k, x) = P^{r-1}(x, x) \cdot P(x, x) = P^{r-1}(x, x).$$

Como $P(x, x) = 1$, temos que $P^r(x, x) = 1$ para todo r inteiro positivo. Daí, para todo $r \in \mathbb{N}$, e para todo $y \in \Omega$ tal que $y \neq x$, temos $P^r(x, y) = 0$. Logo, nenhum estado diferente de x é alcançável a partir de x, o que caracteriza uma cadeia de Markov redutível (por não ser irredutível).

Com isso, sendo P uma cadeia de Markov com matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

temos que um de seus dois estados é absorvente, indicando que P é redutível.

Figura 3.2: Grafo correspondente à cadeia de Markov com matriz de transição P acima, em que o estado da direita é absorvente.

Os exemplos das Seções 3.3 e 3.4 evidenciam casos de cadeias de Markov redutíveis.

3.2 Passeio aleatório no grafo completo

Um grafo $G = (V, E)$ é formado por um conjunto de vértices V (que numa cadeia de Markov podemos entender como um estado) e um conjunto de elos E entre pares de vértices (no máximo um elo para cada par de vértice) , que nos informa quando pares de vértices são comunicantes. Um grafo completo é definido como um grafo que possui a quantidade máxima de elos. Como cada par de vértices possui no máximo um elo unindo-o, temos que um grafo completo de m vértices possuirá $\binom{m}{2} = \frac{m^2-m}{2}$ elos.

Podemos também entender geometricamente que um grafo completo de m vértices é um m-ágono convexo com todos seus lados e diagonais representados.

Figura 3.3: Grafo completo de 7 vértices. Observe que todas as 14 diagonais e 7 lados do heptágono convexo estão representados.

Seja P uma cadeia de Markov representada por um grafo completo de n vértices $A_1, A_2, ..., A_n$ (assim, $\{A_1, A_2, ..., A_n\} = \Omega$). Suponha uma distribuição $P(A_i, \cdot)$ tal que $P(A_i, A_i) = 0, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, e $P(A_i, A_j) = \frac{1}{n-1}$, caso $i \neq j$.

Se o estado inicial for, por exemplo, A_1, após um passo, a chance de o estado corrente ser novamente o A_1 é nula. Neste caso, teremos uma probabilidade de $\frac{1}{n-1}$ para cada um dos outros estados no passo seguinte (podemos entender tal fato como uma distribuição uniforme de probabilidade aos $n-1$ vértices restantes).

Queremos encontrar o valor de $P^k(A_1, A_p)$, para qualquer $A_p \in \Omega$. Após dois passos, a probabilidade de voltarmos ao vértice de partida A_1 é de $\frac{1}{n-1}$. De fato, temos que

$$P^2(A_1, A_1) = \sum_{k=1}^{n} P(A_1, A_k) \cdot P(A_k, A_1).$$

Como $P(A_1, A_1) \cdot P(A_1, A_1) = 0$ e $P(A_1, A_k) \cdot P(A_k, A_1) = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{(n-1)^2}$

para $k \neq 1$, temos que

$$P^2(A_1, A_1) = \sum_{k=2}^{n} P(A_1, A_k) \cdot P(A_k, A_1) = \frac{n-1}{(n-1)^2} = \frac{1}{n-1}.$$

Assim, a probabilidade $\frac{n-1}{n-1} - \frac{1}{n-1} = \frac{n-2}{n-1}$ restante deve ser distribuída uniformemente para os n-1 vértices restantes. Logo, temos

$$P^2(A_1, A_k) = \frac{n-2}{(n-1)^2},$$

se $A_k \in \Omega$ e $k \neq 1$. Repetindo o procedimento, chegamos ao fato de que

$$P^3(A_1, A_1) = \sum_{A_k \in \Omega} P^2(A_1, A_k) \cdot P(A_k, A_1) = (n-1) \cdot \frac{P^2(A_1, A_k)}{n-1} = \frac{n-2}{(n-1)^2},$$

já que temos n-1 vértices distintos de A_1, cada um com probabilidade $\frac{1}{n-1}$ de ser o antecessor imediato do vértice A_1. Generalizando, chegamos ao seguinte fato:

$$P^j(A_1, A_1) = \sum_{A_k \in \Omega} P^{j-1}(A_1, A_k) \cdot P(A_k, A_1) = P^{j-1}(A_1, A_k),$$

com $j \geq 1$, para qualquer A_k fixado tal que $A_k \neq A_1$, $A_k \in \Omega$. Como já sabemos que

$$P^{j-1}(A_1, A_k) = \frac{1 - P^{j-1}(A_1, A_1)}{n-1},$$

se $k \geq 2$, para algum $A_k \neq A_1$ fixado e $A_k \in \Omega$, podemos inferir que

$$P^j(A_1, A_1) = P^{j-1}(A_1, A_k) = \frac{1 - P^{j-1}(A_1, A_1)}{n-1}.$$

Temos, portanto, uma fórmula recursiva para o valor de $P^j(A_1, A_1)$. Resolvendo-a, obtemos

$$P^j(A_1, A_1) = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^j}{n \cdot (n-1)^{j-1}}. \tag{3.2}$$

E, para $A_k \in \Omega$ fixado e $k \neq 1$, temos

$$P^j(A_1, A_k) = \frac{1 - P^j(A_1, A_1)}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{j+1}}{n \cdot (n-1)^j}. \tag{3.3}$$

Finalmente, notamos que os valores de (3.2) e (3.3) convergem para $\frac{1}{n}$, quando j aumenta, ou seja $\lim_{j \to \infty} P^j(A_1, A_k) = \frac{1}{n}$, para todo $A_k \in \Omega$.

Observação 3.1. *Um fato interessante de observar é que para um j ímpar, $P^j(A_1, A_1) < \dfrac{1}{n} < P^j(A_1, A_k)$, com $k \in \{2, ..., n\}$. Para j par, $P^j(A_1, A_k) < \dfrac{1}{n} < P^j(A_1, A_1)$, novamente com $k \in \{2, ..., n\}$.*

3.3 O Problema da Ruína do Jogador com Viés

Definição 3.1. *Sendo X uma variável aleatória discreta com valores $x_1, x_2, x_3, ...$, definimos a esperança de X como a série*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(x_i),$$

em que $P(x_i)$ indica a probabilidade de ocorrer o evento simples x_i.

A esperança de uma variável aleatória discreta pode ser entendida como o valor médio esperado dessa variável, quando ela for repetida uma grande quantidade de vezes. Obviamente, se todos os eventos x_i forem equiprováveis, e x_i for um conjunto finito, a esperança será dada pela média aritmética dos valores x_i.

Abaixo, vejamos um resultado bastante conhecido em Probabilidade e Estatística, conhecida como desigualdade de Tchebychev.

Proposição 3.1 (Desigualdade de Tchebychev). *Seja X uma variável aleatória não-negativa. Então, para todo $\lambda > 0$, temos $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$.*

Demonstração. Sendo $\mathbf{1}_{[X \geq \lambda]}$ a função que assume valor 1 para $X \geq \lambda$, e valor 0 caso contrário, é fácil ver que

$$X \geq \lambda \cdot \mathbf{1}_{[X \geq \lambda]}.$$

Pela definição de esperança, notamos que

$$\mathbb{E}(X) \geq \lambda \cdot \mathbb{P}[X \geq \lambda] + 0 \cdot \mathbb{P}[X > \lambda] = \lambda \cdot \mathbb{P}[X \geq \lambda].$$

Obtemos, portanto, que $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$. $\square$

Definição 3.2. *Um exemplo clássico de cadeia de Markov é o Problema da Ruína do Jogador. Considere um jogador que possui uma fortuna k, sendo k um valor inteiro positivo. Ele lança uma moeda não-viciada (ou seja, a moeda tem uma probabilidade igual de o resultado dar cara ou coroa), aumentando sua fortuna* *para $k+1$ caso a face voltada para cima seja cara, e reduzindo sua fortuna para $k-1$ caso a face voltada para cima seja coroa. Caso o jogador obtenha, em algum momento, uma fortuna n, com n inteiro positivo e $n \geq k$, ele para de jogar a moeda. Caso o jogador perca toda a sua fortuna, ele para de apostar.*

Podemos modelar esta situação considerando cada valor inteiro entre 0 e n (inclusive) como um estado de uma cadeia de Markov. Nesta cadeia, teremos $P(0,0) = P(n,n) = 1$, ou seja, os estados 0 e n são absorventes (implicando na redutibilidade da cadeia) e, $\forall x \in \{1,2,...,n-1\}$,

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } |x-y| = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Podemos entender tal caso como um passeio aleatório (X_t) em $\{0,1,2,...,n\}$, até o momento em que um dos estados 0 ou n é atingido.

Vejamos o Problema da Ruína do Jogador com Viés: vamos supor que, ao invés de a moeda ser honesta, ela tenha probabilidade p de sair cara e $1-p$ de sair coroa, para $0 \leq p \leq 1$, e $p \neq \frac{1}{2}$.

Seja τ o menor tempo em que a fortuna do jogador alcança 0 ou n, ou seja, $\tau := min\{t \mid X_t \in \{0,n\}\}$. Além disso, dizemos que $p_k := \mathbb{P}_k\{X_\tau = n\}$ é a probabilidade de o jogador alcançar n antes de 0, sabendo que a fortuna inicial é k. Assim, obviamente temos $p_0 = 0$ e $p_n = 1$. Além disso, para $1 \leq k \leq n-1$, temos

$$p_k = (1-p) \cdot p_{k-1} + p \cdot p_{k+1}. \tag{3.4}$$

Podemos justificar (3.4) pelo fato de que, estando em k, a cadeia de Markov só se move para $k-1$ ou $k+1$. Assim, podemos definir a probabilidade de alcançarmos a fortuna, saindo de k, em função das probabilidades de a alcançarmos, saindo de $k-1$ e $k+1$, com seus respectivos pesos (probabilidades).

Logo, resolvendo o sistema recursivo

$$p_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0, \\ 1, & \text{se } k = n, \\ (1-p) \cdot p_{k-1} + p \cdot p_{k+1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n-1, \end{cases}$$

obtemos, para $1 \leq k \leq n$, que $p_k = (1-p) \cdot p_{k-1} + p \cdot p_{k+1}$. Daí, obtemos $p \cdot p_k + (1-p) \cdot p_k = (1-p) \cdot p_{k-1} + p \cdot p_{k+1} \Rightarrow \dfrac{p_{k+1} - p_k}{p_k - p_{k-1}} = \dfrac{1-p}{p}$.

Com isso, definindo $\Delta_k := p_k - p_{k-1}$, para $1 \leq k \leq n$, temos que

$$\Delta_{k+1} = \left(\frac{1-p}{p}\right) \cdot \Delta_k,$$

o que indica que Δ_i, com $1 \leq i \leq k$, forma uma progressão geométrica de razão $\frac{1-p}{p}$. Vamos encontrar o primeiro termo da progressão.
Mas, pela definição de Δ_k, obtemos $\sum_{k=1}^{n} \Delta_k = p_n - p_0 = 1$. Usando a fórmula para a soma de uma progressão geométrica finita, vem

$$1 = \Delta_1 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)} \right).$$

Portanto,

$$\Delta_1 = p_1 - p_0 = p_1 = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}.$$

Resta encontrar os valores de p_k, para todo $1 \leq k \leq n$. Mas, temos que $p_k = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i$. Como Δ_i forma uma progressão geométrica finita, com termo inicial $\frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}$, obtemos

$$p_k = \mathbb{P}_k \{X_\tau = n\} = \left[\frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n} \right] \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)} \right] = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n},$$

para todo $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Sabendo que a fortuna inicial é k, queremos descobrir o tempo esperado, $f_k := \mathbb{E}_k(\tau)$, para chegarmos em algum dos dois estados absorventes. De início, temos que $f_0 = f_n = 0$.

Além disso, inferimos que se $1 \leq k \leq n - 1$,

$$f_k = p \cdot (1 + f_{k+1}) + (1 - p) \cdot (1 + f_{k-1}),$$

tendo em vista que há a probabilidade p de o próximo passo ser $k + 1$, e probabilidade $1 - p$ de o próximo passo ser $k - 1$. Porém, ao expressarmos a esperança em k em função das esperanças nos estados adjacentes ($k - 1$ e $k + 1$), devemos acrescentar uma unidade em cada uma das esperanças f_{k+1} e f_{k-1} antes de multiplicarmos pelo seus respectivos pesos, já que ao passarmos de k a um estado vizinho, já realizamos um passo.

Obtemos, portanto, o sistema recursivo

$$f_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k = n, \\ p \cdot (1 + f_{k+1}) + (1 - p) \cdot (1 + f_{k-1}), & \text{se } 1 \leq k \leq n - 1. \end{cases}$$

A solução deste sistema é dada por

$$f_k = \mathbb{E}_k(\tau) = \left(\frac{\frac{1-p}{p} + 1}{\frac{1-p}{p} - 1} \right) \cdot \left[k - n \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1} \right].$$

Para encontrar soluções de sistemas recursivos não-homogêneos de primeira ordem e coeficientes constantes, ver [H. Pollman] nas páginas 38 a 40.

Proposição 3.2. *Considere, agora, a versão tradicional do Problema da Ruína do Jogador ($p = \frac{1}{2}$). Seja X_t a variável que indica a fortuna do jogador no tempo t, e seja τ o tempo gasto para chegar em um dos estados absorventes. Assumindo $X_0 = k$ ($0 \leq k \leq n$) como a fortuna inicial do jogador, temos*

$$\mathbb{P}_k \{X_\tau = n\} = \frac{k}{n},$$

e

$$\mathbb{E}_k(\tau) = k(n-k),$$

em que $\mathbb{P}_k \{X_\tau = n\}$ e $\mathbb{E}_k(\tau)$ indicam, respectivamente, a probabilidade de, partindo do estado k, chegarmos em n antes de chegarmos ao 0, e o tempo esperado para chegarmos a um dos estados absorventes, sabendo que a fortuna inicial é k.

Podemos provar isto, fazendo

$$\lim_{p \to \frac{1}{2}} \mathbb{P}_k \{X_\tau = n\} = \lim_{p \to \frac{1}{2}} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n} = \frac{k}{n},$$

e

$$\lim_{p \to \frac{1}{2}} \mathbb{E}_k(\tau) = \lim_{p \to \frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{1-p}{p} + 1}{\frac{1-p}{p} - 1} \right) \cdot \left[k - n \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1} \right] = k \cdot (n-k),$$

já que tanto $\mathbb{P}_k \{X_\tau = n\}$ quanto $E_k(\tau)$ são funções contínuas em p. Para provar a continuidade de tais funções, podemos utilizar o Teorema da Convergência Dominada, porém isto não será feito neste trabalho.

Existe uma prova mais elegante (e sem utilizar a fórmula obtida no caso com viés) para a proposição acima. Para isso, ver [Y. Peres], páginas 21 e 22.

3.3.1 Um resultado anti-intuitivo

Vejamos, agora, um resultado envolvendo um passeio aleatório no n-ciclo, mas que é solucionado através do que foi obtido no Problema da Ruína do Jogador. Este resultado, que será enunciado e provado abaixo, surpreende por desafiar a intuição.

Proposição 3.3. *Considere um passeio aleatório n-ciclo. Seja W o último vértice a ser visitado no passeio. Então, W é uniformemente distribuído por todos os vértices diferentes do vértice inicial, ou seja, qualquer vértice do n-ciclo, excetuando o vértice inicial, tem uma probabilidade* $\frac{1}{n-1}$ *de ser o último vértice a ser visitado.*

Este resultado parece contraditório, já que, aparentemente, os vértices mais próximos do vértice inicial teriam menor probabilidade de ser o último a ser visitado que os vértices mais afastados do vértice inicial. Contudo, usando o resultado conseguido no Problema da Ruína do Jogador para $p = \frac{1}{2}$, obtemos uma prova simples para tal fato.

Demonstração. Tomando, sem perda de generalidade, o vértice 0 como o vértice inicial, calcularemos a probabilidade de cada vértice k (com $1 \leq k \leq n-1$) ser o último a ser visitado.

Para $k = 1$, podemos imaginar o n-ciclo como um passeio idêntico ao da ruína do jogador, usando $p = \frac{1}{2}$, com estados $\{1, 0, n-1, n-2, ..., 3, 2\}$. Para que o estado 1 seja o último a ser visitado, basta que o estado 2 seja visitado antes do estado 1, já que garantiremos que todos os outros estados em $\{0, n-1, n-2, ..., 3, 2\}$ sejam visitados. A probabilidade de isto ocorrer é $\frac{1}{n-1}$, já que podemos entender este modelo como o de um jogador que possui fortuna 1, pretendendo alcançar a fortuna $n-1$ antes de perder todo o seu dinheiro.

Se $k = n-1$, obtemos o mesmo resultado, por haver simetria entre $n-1$ e 1, partindo do estado 0.

Caso k seja tal que $2 \leq k \leq n-2$, temos que, para que k seja visitado, obrigatoriamente um dos estados vizinhos $k-1$ ou $k+1$ deve ser visitado antes de k. Se $k-1$ for visitado antes de $k+1$, para que k seja o último estado a ser visitado, devemos ter $k+1$ visitado antes de k. Imaginemos novamente o Problema da Ruína do Jogador, mas agora em $\{k, k-1, ..., 1, 0, n, ..., k+1\}$. Analogamente, vemos que a probabilidade de k ser visitado antes de $k+1$ é $\frac{1}{n-1}$. Se $k+1$ for visitado antes de $k-1$, k será o último estado a ser visitado somente se $k-1$ for visitado antes de k. Imaginando o passeio em $\{k, k+1, ..., n, 0, 1, ..., k-1\}$, novamente há uma probabilidade $\frac{1}{n-1}$ de $k-1$ ser visitado antes de k. Já que, necessariamente $k-1$ ou $k+1$ deve ser visitado antes de k, para qualquer k tal que $2 \leq k \leq n-2$, há também uma probabilidade $\frac{1}{n-1}$ de k ser o último estado a ser visitado. $\square$

3.4 O colecionador de figurinhas

Um colecionador de figurinhas deseja completar o seu álbum, e para consegui-lo, deve achar os n tipos de figurinhas diferentes que são fabricados. A cada vez que o colecionador obtém uma nova figurinha, os n tipos de figurinhas diferentes possuem a mesma chance de ser retirados, independente dos tipos de figurinhas retirados anteriormente.

Podemos, assim, transformar esse modelo em uma cadeia de Markov. Os estados (X_t) desta cadeia serão os inteiros $\{0, 1, 2, ..., n\}$, em que X_t será a quantidade de figurinhas distintas, dentre as t primeiras figurinhas obtidas pelo colecionador.

Assim, tem-se claramente, $X_0 = 0$, já que o colecionador começa com o álbum vazio. Além disso, se o colecionador possui k figurinhas distintas, faltarão $n - k$ tipos de figurinhas. Obtemos, com isso,

$$\mathbb{P}\{X_{t+1} = k + 1 \mid X_t = k\} = \frac{n-k}{n}$$

e

$$\mathbb{P}\{X_{t+1} = k \mid X_t = k\} = \frac{k}{n}.$$

Notemos que a cadeia é redutível, já que uma vez visitando o estado k, com $k \neq 0$, a cadeia não visita mais o estado $k - 1$. Outrossim, como era esperado, quanto mais tipos diferentes de figurinhas o colecionador tem, menos provável que, no passo seguinte, ele encontre um tipo de figurinha que ele não possui.

Proposição 3.4. *Sob as condições citadas acima, e sendo τ o tempo em que o colecionador consegue completar o álbum, temos que*

$$\mathbb{E}(\tau) = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

em que $\mathbb{E}(\tau)$ é o tempo esperado para completar o álbum.

Demonstração. Escrevendo τ_k como o número total de figurinhas acumuladas para obter, pela primeira vez, k figurinhas distintas, temos

$$\tau = \tau_n = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) + ... + (\tau_n - \tau_{n-1}).$$

Após obter $k - 1$ figurinhas distintas, o colecionador possui probabilidade $\dfrac{n-k+1}{n}$ de obter uma figurinha diferente. Caso ele não consiga, ele continua com esta mesma probabilidade para as retiradas seguintes, enquanto ele não obtém um tipo de figurinha que ainda não possui. Logo, temos $\mathbb{E}(\tau_k - \tau_{k-1}) = \dfrac{1}{\mathbb{P}\{X_{t+1} = k+1 \mid X_t = k\}} = \dfrac{n}{n-k+1}$. Daí,

$$\mathbb{E}(\tau) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} (\tau_k - \tau_{k-1})\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\tau_k - \tau_{k-1}) = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

□

A segunda igualdade é justificada pelo fato de que a esperança é linear. Para mais detalhes, ver [B. James], páginas 115 e 116. Na última desigualdade, foi feita uma mudança da ordem dos somandos.

Proposição 3.5. *Seja τ a variável aleatória que representa a quantidade de figurinhas obtidas até completar o álbum e n a quantidade de figurinhas distintas necessárias para completar o álbum. Então, para qualquer $c > 0$,*

$$\mathbb{P}\{\tau > \lceil n \cdot \ln n + c \cdot n \rceil\} \leq e^{-c}.$$

Como n já é um valor conhecido, conseguimos limitar a probabilidade de o colecionador não conseguir completar o álbum, ajustando um valor adequado de c. Para uma prova desta proposição, ver [Y. Peres], página 23.

3.5 O passeio aleatório no hipercubo

Definição 3.3. *Um hipercubo n-dimensional é um grafo cujos vértices são as n-uplas contidas $\{0,1\}^n$, havendo elos (conexões entre vértices) somente nos pares de vértices que distinguem-se em exatamente uma coordenada.*

Definição 3.4. *Um passeio aleatório no hipercubo n-dimensional é dado por movimentos a partir de um vértice $(x_1, x_2, ..., x_n)$ a outro conectado a ele por um elo. A mudança de estado será definida da seguinte forma: partindo de $(x_1, x_2, ..., x_n)$, escolhemos uma coordenada $j \in \{1, 2, ..., n\}$ uniformemente, e o estado seguinte será dado trocando o valor da j-ésima coordenada, ou seja, o estado seguinte será $\Big(x_1, x_2, ..., x_{j-1}, 1 - x_j, x_{j+1}, ..., x_n\Big)$.*

Afirmação 3.3. *O passeio aleatório no hipercubo é uma cadeia de Markov periódica.*

De fato, sendo U_t (com $0 \leq U_t \leq n$) a quantidade de coordenadas iguais a 1 no tempo t, temos que as paridades de U_t e U_{t+1} são necessariamente distintas. Igualmente, U_{t+1} e U_{t+2} tem paridades distintas, e assim por diante. Com isso, se $x \in \{0,1\}^n$ é um estado do hipercubo, temos que $\tau(x) = \{2, 4, 6, ...\}$, ou seja $MDC\,(\tau\,(x)) = 2$, e o passeio é periódico.

Para corrigir este "problema", faz-se o passeio aleatório preguiçoso no hipercubo. Este passeio segue o padrão do anterior, somente com a seguinte mudança: se $x \in \{0,1\}^n$ é o estado atual do hipercubo n-dimensional, temos que a probabilidade de x ser o próximo estado é $\frac{1}{2}$. A probabilidade restante é distribuída uniformemente (como no caso original) entre os vértices unidos a x.

3.6 O passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$

Definição 3.5. *O passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$ (também conhecido como Passeio do Bêbado em $\mathbb{Z}$) é dado pela sequência (X_t) com incremento aleatório (Δ_t) valorado uniformemente em $\{-1, 1\}$. Em outras palavras, o passeio supracitado pode ser modelado por uma cadeia de Markov que possui $\mathbb{Z}$ como espaço de estados, e obedece à matriz de transição*

$$P(j,k) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \textit{se} \quad k = j+1, \\ \frac{1}{2}, & \textit{se} \quad k = j-1, \\ 0, & \textit{caso contrário}, \end{cases}$$

em que $j, k \in \mathbb{Z}$.

Convém observar que este é o único exemplo deste trabalho que traz uma cadeia de Markov com estado de espaços infinito.

Observa-se que, assim como o passeio aleatório no hipercubo, o passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$ é periódico. Pode-se, portanto, evitar isto criando o passeio aleatório preguiçoso em $\mathbb{Z}$, cuja matriz de transição é dada por

$$P(j,k) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se} \quad k = j+1, \\ \frac{1}{4}, & \text{se} \quad k = j-1, \\ \frac{1}{2}, & \text{se} \quad k = j, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

em que $j, k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.1. *Seja (X_t) um passeio aleatório em $\mathbb{Z}$, e seja*

$$\tau_0 = min\{t \geq 0 \mid X_t = 0\}$$

o primeiro tempo em que o passeio atinge o estado 0*. Então,*

$$\mathbb{P}_k\{\tau_0 > r\} \leq \frac{6k}{\sqrt{r}},$$

para quaisquer inteiros positivos k e r, em que $\mathbb{P}_k\{\tau_0 > r\}$ indica a probabilidade de que r seja menor que o primeiro tempo em que o passeio atinge o estado 0*, dado que o passeio inicia em k ($X_0 = k$).*

Este teorema fornece um limitante para a probabilidade de o passeio atingir o estado 0 após um tempo determinado. Apesar deste limitante ser pouco útil para alguns valores pequenos de r, será útil para limitar distâncias em variação total entre certas distribuições de probabilidade, que é um conceito a ser visto no capítulo seguinte.

A demonstração do teorema será omitida, mas pode ser encontrada em [Y. Peres], nas páginas 30 a 33.

Observação 3.2. *Na demonstração supracitada, o autor encontra a desigualdade*

$$\mathbb{P}_k\{\tau_0 > r\} \leq \frac{12k}{\sqrt{r}}.$$

Contudo, é possível melhorar o resultado na última linha da prova do teorema, em [Y. Peres], página 33. Com este resultado melhorado, limitamos ainda mais o valor de $\mathbb{P}_k\{\tau_0 > r\}$, como se vê no teorema 3.1.

Capítulo 4

Distância em variação total e tempos de mistura

Este capítulo trará as últimas ferramentas necessárias para a compreensão do Teorema da Convergência em Variação Total de Cadeias de Markov. Portanto, é necessário introduzir a noção de distância entre duas distribuições de probabilidade, e escolher uma métrica apropriada para tal.

4.1 Distância em variação total

Definição 4.1. *Sejam μ e ν duas distribuições de probabilidade em Ω. Definimos a distância em variação total entre elas como*

$$\left\|\mu - \nu\right\|_{VT} := \max_{A \subseteq \Omega} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

Com isso, esta distância é a maior diferença de probabilidade possível atribuída a duas distribuições, restrita a um evento simples $A \subseteq \Omega$. A Figura 4.1 abaixo ilustra a variação total de distância entre as distribuições de probabilidade μ e ν.

Figura 4.1: Distribuições μ e ν definidas em $\Omega = B \cup B^C$, um conjunto discreto finito.

Na Figura 4.1, notamos que $B = \{x \mid \mu(x) > \nu(x)\}$ e $B^C = \{x \mid \mu(x) \leq \nu(x)\}$. Como $\sum\limits_{x\in\Omega} \mu(x) = \sum\limits_{x\in\Omega} \nu(x) = 1$, tem-se que as áreas I e II são iguais, ou seja, $\mu(B) - \nu(B) = \nu(B^C) - \mu(B^C)$.

Conseguimos uma caracterização alternativa para $\left\|\mu - \nu\right\|_{VT}$, que é descrita na Proposição 4.1. Na Observação 4.2, veremos que existe outra caracterização para distância em variação total usando acoplamentos, contudo usaremos somente a desigualdade contida na Proposição 4.2.

Proposição 4.1. *Sejam μ e ν duas distribuições de probabilidade em Ω. Então,*

$$\left\|\mu - \nu\right\|_{VT} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{x\in\Omega} \left|\mu(x) - \nu(x)\right|.$$

Demonstração. Tomando $B := \{x \mid \mu(x) \geq \nu(x)\}$, e tomando qualquer evento $A \subseteq \Omega$, temos

$$\begin{aligned}
\mu(A) - \nu(A) &= \mu\,(A \setminus B) + \mu\,(A \cap B) - \nu\,(A \setminus B) - \nu\,(A \cap B) \\
&= \mu\,(A \cap B) - \nu\,(A \cap B) + (\mu\,(A \setminus B) - \nu\,(A \setminus B)) \\
&\leq \mu(A \cap B) - \nu(A \cap B) \\
&\leq \mu(A \cap B) - \nu(A \cap B) + (\mu(B \setminus A) - \nu(B \setminus A)) \\
&= \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) - (\nu(A \cap B) + \nu(B \setminus A)) \\
&= \mu(B) - \nu(B).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

A primeira e a quarta igualdades são obtidas escrevendo $A = (A \setminus B) \cup (B \cap A)$ e $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$, respectivamente. A primeira desigualdade é obtida pela definição de B: se $x \in A \setminus B$, então

$$\mu(x) < \nu(x) \Rightarrow \mu(x) - \nu(x) < 0 \Rightarrow \mu(A \setminus B) - \nu(A \setminus B) \leq 0,$$

com igualdade somente se $A \subseteq B$. Para justificar a segunda desigualdade, temos, com um argumento completamente análogo, que $\mu(B \setminus A) - \nu(B \setminus A) \geq 0$, com igualdade somente se $B \subseteq A$. Como podemos definir $B^C := \{x \mid \mu(x) < \nu(x)\}$, temos, semelhantemente à desigualdade (4.1), que

$$\nu(B^C) - \mu(B^C) \geq \nu(A) - \mu(A).$$

Como $\max_{A \subseteq \Omega} \left|\mu(A) - \nu(A)\right| = (\mu(B) - \nu(B)) + \left(\nu(B^C) - \mu(B^C)\right)$, obtemos

$$\left\|\mu - \nu\right\|_{VT} = \frac{1}{2} \cdot \left[\mu(B) - \nu(B) + \nu(B^C) - \mu(B^C)\right] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in \Omega} \left|\mu(x) - \nu(x)\right|.$$

$\square$

Observação 4.1. *Para $x \in \Omega$, também podemos simplesmente escrever*

$$\left\|\mu - \nu\right\|_{VT} = \sum_{\mu(x) \geq \nu(x)} \left[\mu(x) - \nu(x)\right].$$

De fato, como

$$\sum_{\mu(x) \geq \nu(x)} \left[\mu(x) - \nu(x)\right] = \sum_{\nu(x) \geq \mu(x)} \left[\nu(x) - \mu(x)\right],$$

temos

$$\begin{aligned}
\left\|\mu - \nu\right\|_{VT} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in \Omega} \left|\mu(x) - \nu(x)\right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{\mu(x) \geq \nu(x)} \left[\mu(x) - \nu(x)\right] + \sum_{\nu(x) \geq \mu(x)} \left[\nu(x) - \mu(x)\right]\right] \\
&= \sum_{\mu(x) \geq \nu(x)} \left[\mu(x) - \nu(x)\right].
\end{aligned}$$

Afirmação 4.1. *Sendo μ, ν e η distribuições de probabilidade definidas no mesmo espaço de probabilidades Ω, vale a desigualdade triangular*

$$\left\|\mu - \nu\right\|_{TV} \leq \left\|\mu - \eta\right\|_{TV} + \left\|\eta - \nu\right\|_{TV}.$$

De fato, tomando $x \in \Omega$, temos que $\mu(x), \nu(x)$ e $\eta(x)$ assume valores reais. Logo, vale

$$\left|\mu(x) - \nu(x)\right| \leq \left|\mu(x) - \eta(x)\right| + \left|\eta(x) - \nu(x)\right|.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\Omega}\left|\mu(x)-\nu(x)\right| &\leq \sum_{x\in\Omega}\left[\left|\mu(x)-\eta(x)\right|+\left|\eta(x)-\nu(x)\right|\right]\\ &= \sum_{x\in\Omega}\left|\mu(x)-\eta(x)\right|+\sum_{x\in\Omega}\left|\eta(x)-\nu(x)\right|.\end{aligned}$$

Portanto, temos $2\cdot\left\|\mu-\nu\right\|_{VT} \leq 2\cdot\left\{\left\|\mu-\eta\right\|_{VT}+\left\|\eta-\nu\right\|_{TV}\right\}$. Dividindo ambos os lados da desigualdade por 2, obtemos a desigualdade desejada.

4.2 Acoplamento entre duas distribuições de probabilidade

Definição 4.2. *Um acoplamento entre duas distribuições de probabilidades μ e ν é um par de variáveis aleatórias (X,Y), definidas no mesmo espaço de probabilidade Ω, de modo que μ e ν são as distribuições marginais de X e Y, respectivamente. Ou seja, (X,Y) satisfaz $\mathbb{P}\{X=x\}=\mu(x)$ e $\mathbb{P}\{Y=y\}=\nu(y)$, com $x,y\in\Omega$.*

Dado um acoplamento (X,Y) de μ e ν, se q é a distribuição conjunta de (X,Y) em $\Omega\times\Omega$, ou seja, $q(x,y)=\mathbb{P}\{X=x,Y=y\}$, então

$$\sum_{y\in\Omega}q(x,y)=\sum_{y\in\Omega}\mathbb{P}\{X=x,Y=y\}=\mathbb{P}\{X=x\}=\mu(x)$$

e

$$\sum_{x\in\Omega}q(x,y)=\sum_{x\in\Omega}\mathbb{P}\{X=x,Y=y\}=\mathbb{P}\{Y=y\}=\nu(y).$$

Reciprocamente, se q é uma distribuição de probabilidade em $\Omega\times\Omega$ que satisfaz

$$\sum_{y\in\Omega}q(x,y)=\mu(x) \quad \text{e} \quad \sum_{x\in\Omega}q(x,y)=\nu(y),$$

então existirá um par de variáveis aleatórias (X,Y) tendo q como distribuição conjunta. Consequentemente, esse par (X,Y) é um acoplamento de μ e ν.

Exemplo 4.1. *Sendo μ e ν distribuições de probabilidade uniformes definidas em $\{0,1\}$, ou seja, podemos associar o modelo a dois lançamentos de uma moeda honesta: o valor 1 sendo associado à face cara, e o 0 associado à face coroa. Podemos acoplar μ e ν de mais de uma forma distinta, como temos abaixo:*

(i) Uma forma de acoplar μ e ν é definir (X, Y) como um par de resultados de lançamentos de moedas honestas e independentes, obtendo $\mathbb{P}\{X = x, Y = y\} = \frac{1}{4}$, para todos $x, y \in \{0, 1\}$. Ou seja, a distribuição conjunta q_1 de (X, Y) será dada por

$$q_1(x, y) = \frac{1}{4}, \quad \forall (x, y) \in \{0, 1\}^2 .$$

(ii) Uma outra forma de fazer um acoplamento entre μ e ν é tomar X como o resultado de um lançamento de uma moeda honesta, e fazer $Y = X$. Assim, $\mathbb{P}\{X = Y = 0\} = \mathbb{P}\{X = Y = 1\} = \frac{1}{2}$, e $\mathbb{P}\{X \neq Y\} = 0$. Logo, a distribuição conjunta q_2 de (X, Y) será

$$q_2(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0), (x, y) = (1, 1), \\ 0, & \text{se} \quad (x, y) = (0, 1), (x, y) = (1, 0). \end{cases}$$

Quaisquer duas distribuições μ e ν podem ser acopladas de maneira independente. Quando μ e ν são iguais, podemos escolher uma variável aleatória X com distribuição μ e acoplar μ e ν da maneira (X, X). Já quando μ e ν não são distribuições idênticas, dado um acoplamento (X, Y) para μ e ν, não será sempre possível obtermos os mesmos valores para X e Y. Conseguimos, contudo, na proposição abaixo, limitar inferiormente a probabilidade de X e Y serem distintos, sabendo que (X, Y) é um acoplamento de μ e ν. Usaremos a proposição a seguir para demonstrar o Teorema da Convergência em Variação Total, no Capítulo 5.

Proposição 4.2. *Sejam μ e ν duas distribuições de probabilidade em Ω. Então*

$$\left\| \mu - \nu \right\|_{VT} \leq \mathbb{P}\{X \neq Y\},$$

em que (X,Y) é um acoplamento de μ e ν.

Demonstração. Notemos, de início, que para qualquer acoplamento (X, Y) de μ e ν e qualquer conjunto $A \subseteq \Omega$, vale que

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}\{X = x\} = \mathbb{P}\{X \in A\},$$

e analogamente,

$$\nu(A) = \sum_{y \in A} \mathbb{P}\{Y = y\} = \mathbb{P}\{Y \in A\}.$$

Com isso, escrevemos

$$\begin{aligned}
\mu(A) - \nu(A) &= \mathbb{P}\{X \in A\} - \mathbb{P}\{Y \in A\} \\
&= \mathbb{P}\{X \in A\} - \mathbb{P}\{Y \cap X \in A\} - \mathbb{P}\{Y \setminus X \in A\} \\
&\leq \mathbb{P}\{X \in A\} - \mathbb{P}\{Y \cap X \in A\} \\
&= \mathbb{P}\{X \in A \cap Y \notin A\} \\
&\leq \mathbb{P}\{X \neq Y\}.
\end{aligned}$$

A segunda e a terceira igualdades são obtidas operando conjuntos. A primeira desigualdade se justifica pelo fato de que $\mathbb{P}\{Y \setminus X \in A\}$ é sempre um valor não-negativo. A segunda desigualdade é explicada pelo fato de que $X \in A$ e $Y \notin A \Rightarrow X \neq Y$.

Com um passagens análogas, obtemos, para qualquer conjunto $A \subseteq \Omega$,

$$\nu(A) - \mu(A) \leq \mathbb{P}\{Y \neq X\} = \mathbb{P}\{X \neq Y\}.$$

Logo, obtemos imediatamente

$$\left\|\mu - \nu\right\|_{VT} = \max_{A \subseteq \Omega} \left|\mu(A) - \nu(A)\right| \leq \mathbb{P}\{X \neq Y\}.$$

□

Observação 4.2. *Sempre existe um acoplamento (X, Y) de μ e ν (chamado acoplamento ótimo) tal que $\mathbb{P}\{X \neq Y\}$ é exatamente igual a $\left\|\mu - \nu\right\|_{VT}$. A prova deste fato pode ser vista em [Y. Peres], nas páginas 50 a 52.*

4.3 Tempos de mistura

Já vimos no início deste capítulo, uma métrica que nos fornece a distância entre duas distribuições de probabilidade. Veremos agora algumas definições que serão necessárias para limitar o tempo preciso para que duas distribuições atinjam uma certa distância em variação total determinada.

Definição 4.3. *Sendo P uma cadeia de Markov com espaço de estados Ω e distribuição π, definimos as funções $d(t)$ e $\bar{d}(t)$ como*

$$d(t) := \max_{x \in \Omega} \left\|P^t(x, \cdot) - \pi\right\|_{VT},$$

e

$$\bar{d}(t) := \max_{x, y \in \Omega} \left\|P^t(x, \cdot) - P^t(y, \cdot)\right\|_{VT}.$$

Lema 4.1. *Sendo $d(t)$ e $\bar{d}(t)$ como definidos em 4.3, então*

$$d(t) \leq \bar{d}(t) \leq 2d(t).$$

Demonstração. A segunda desigualdade do Lema 4.1 é obtida diretamente pela desigualdade triangular: temos

$$\begin{aligned}
\bar{d}(t) &= \max_{x,y\in\Omega} \left\| P^t(x,\cdot) - P^t(y,\cdot) \right\| \\
&\leq \max_{x,y\in\Omega} \left[\left\| P^t(x,\cdot) - \pi \right\|_{VT} + \left\| P^t(y,\cdot) - \pi \right\|_{VT} \right] \\
&\leq \max_{x\in\Omega} \left\| P^t(x,\cdot) - \pi \right\|_{VT} + \max_{y\in\Omega} \left\| P^t(y,\cdot) - \pi \right\|_{VT} \\
&= \max_{x\in\Omega} \left\| P^t(x,\cdot) - \pi \right\|_{VT} + \max_{x\in\Omega} \left\| P^t(x,\cdot) - \pi \right\|_{VT} \\
&= 2d(t),
\end{aligned}$$

em que a primeira e a última igualdades são obtidas das definições de $d(t)$ e $\bar{d}(t)$, e a segunda é obtida trocando a variável x por y, que é permitido, já que x e y são arbitrários. A primeira desigualdade advém da desigualdade triangular provada na Afirmação 4.1.

Para provar a segunda desigualdade do Lema 4.1, devemos primeiro notar que, se P é uma cadeia de Markov com espaço de estados Ω e distribuição estacionária π, para qualquer conjunto $A \subseteq \Omega$, vale que

$$\pi(A) = \sum_{x\in A} \pi(x) = \sum_{x\in A} \left(\sum_{y\in A} \pi(y) \cdot P^t(y,x) \right) = \sum_{y\in\Omega} \pi(y) \cdot P^t(y,A). \tag{4.2}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
d(t) = \left\| P^t(x,\cdot) - \pi \right\|_{VT} &= \max_{A\subseteq\Omega} \left| P^t(x,A) - \pi(A) \right| \\
&= \max_{A\subseteq\Omega} \left| \sum_{y\in\Omega} \pi(y) \cdot \left[P^t(x,A) - P^t(y,A) \right] \right| \\
&= \max_{A\subseteq\Omega} \sum_{y\in\Omega} \pi(y) \cdot \left| P^t(x,A) - P^t(y,A) \right|,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

em que a segunda igualdade vem diretamente da Definição 4.1 de distância em variação total, a terceira é explicada pela equação (4.2) e pelo fato de que $\sum_{y\in\Omega} \pi(y) \cdot P^t(x,A) = P^t(x,A) \cdot \sum_{y\in\Omega} \pi(y) = P^t(x,A)$ (já que π é uma distribuição de probabilidade), e a quarta é justificada pelo fato de que para todo $y \in \Omega$, temos $\pi(y) \geq 0$.

Sabemos que o máximo da soma de números reais não é maior que a soma dos máximos de números reais. Usando este fato, a Definição 4.1 de distância em variação total, e o resultado de que a soma de $\pi(y)$ não supera o valor 1, obtemos

$$\begin{aligned}
\max_{A\subseteq\Omega} \sum_{y\in\Omega} \pi(y)\cdot\left|P^t(x,A)-P^t(y,A)\right| &\leq \sum_{y\in\Omega}\pi(y)\cdot\max_{A\subseteq\Omega}\left|P^t(x,A)-P^t(y,A)\right| \\
&= \sum_{y\in\Omega}\pi(y)\cdot\left\|P^t(x,\cdot)-P^t(y,\cdot)\right\|_{VT} \\
&\leq \max_{x,y\in\Omega}\left\|P^t(x,\cdot)-P^t(y,\cdot)\right\|_{VT} \\
&= \bar{d}(t).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Com a equação (4.3) e a desigualdade (4.4), obtemos o resultado desejado. □

Lema 4.2. *A função $\bar{d}(t)$ obedece à propriedade sub-multiplicativa, ou seja,*

$$\bar{d}(s+t) \leq \bar{d}(s)\cdot\bar{d}(t).$$

A demonstração do Lema 4.2 pode ser encontrada em [Y. Peres], na página 54.

Com estes resultados, obtemos:

$$d(ct) \leq \bar{d}(ct) \leq \left[\bar{d}(t)\right]^c, \tag{4.5}$$

em que c e t são inteiros não-negativos. As duas desigualdades são imediatas: a primeira é justificada pelo Lema 4.1 e a segunda pelo Lema 4.2.

Um parâmetro útil para medir o tempo preciso para que uma distribuição se aproxime da distribuição estacionária o quanto queiramos é o tempo de mistura.

Definição 4.4. *Sendo $\epsilon \in [0,1]$, definimos tempo de mistura como*

$$t_{mix}(\epsilon) := min\left\{t : d(t) \leq \epsilon\right\}.$$

Definimos também

$$t_{mix} := t_{mix}\left(\frac{1}{4}\right).$$

Note que é necessário que $0 \leq \epsilon \leq 1$, já que distâncias entre distribuições de probabilidade variam entre 0 e 1. Quando $d(t) \leq \epsilon = 0$, para alguma cadeia de Markov P, então $\delta_x P^t$ é a distribuição estacionária, onde δ_x é a distribuição que inicia o passeio em x.

Veremos agora uma inequação que relaciona $t_{mix}(\epsilon)$ e t_{mix}.

Afirmação 4.2. *Se* $\epsilon \in (0,1]$, *então*

$$t_{mix}(\epsilon) \leq \left\lceil log_2 \epsilon^{-1} \right\rceil \cdot t_{mix}.$$

Demonstração. De fato, se l é um inteiro não-negativo, então

$$d\left(l \cdot t_{mix}(\epsilon)\right) \leq \bar{d}\left(l \cdot t_{mix}(\epsilon)\right) \leq \left[\bar{d}\left(t_{mix}(\epsilon)\right)\right]^l \leq (2\epsilon)^l.$$

A primeira desigualdade resulta da primeira desigualdade do Lema 4.1, a segunda desigualdade resulta da inequação (4.5). Para provar a última desigualdade, devemos notar que

$$\bar{d}\left(t_{mix}(\epsilon)\right) = \bar{d}\left(t : d(t) \leq \epsilon\right) = \bar{d}\left(t : 2d(t) \leq 2\epsilon\right) \leq \bar{d}\left(t : \bar{d}(t) \leq \epsilon\right) \leq 2\epsilon, \quad (4.6)$$

em que a primeira desigualdade de 4.6 é explicada pela segunda desigualdade de Lema 4.1. Escolhendo $\epsilon = \dfrac{1}{4}$, e substituindo na inequação (4.6), obtemos

$$d\left(l \cdot t_{mix}\right) \leq 2^{-l}. \quad (4.7)$$

Sabemos que na inequação (4.7), l deve ser um valor inteiro não-negativo. Se tomarmos $l = \left\lceil \log_2 \epsilon^{-1} \right\rceil$, e sustituindo em (4.7), obtemos

$$d\left(\left\lceil \log_2 \epsilon^{-1} \right\rceil \cdot t_{mix}\right) \leq 2^{-\left\lceil \log_2 \epsilon^{-1} \right\rceil} \leq \frac{1}{2^{\log_2 \epsilon^{-1}}} = \epsilon.$$

Obtemos, portanto, da definição de tempo de mistura, que

$$t_{mix}(\epsilon) \leq \left\lceil \log_2 \epsilon^{-1} \right\rceil \cdot t_{mix}.$$

□

Observação 4.3. *A escolha de* $\frac{1}{4}$ *para definirmos* t_{mix} *é arbitrária, embora tivéssemos que escolher um valor menor que* $\frac{1}{2}$ *para que a desigualdade*

$$d\left(l \cdot t_{mix}(\epsilon)\right) \leq (2\epsilon)^l \quad (4.8)$$

seja não-trivial. De fato, se $\frac{1}{2} \leq \epsilon \leq 1$, *o lado direito da desigualdade* (4.8) *é maior ou igual a* 1, *o que a torna inútil, já que sempre uma distância em variação total é sempre menor ou igual a* 1.

4.4 Limitantes para tempos de mistura de cadeias de Markov

Nesta seção veremos técnicas para limitar a distância entre algumas distribuições de cadeias que vimos no Capítulo 3 e suas distribuições estacionárias. Iremos, para isso, buscar limitar os valores de $d(t)$, e usar um tipo de acoplamento especial entre cadeias de Markov. Mas antes, veremos alguns resultados que nos fornecerão ferramentas para tal.

4.4.1 Alguns resultados prévios

Definição 4.5. *Dada uma cadeia de Markov com espaços de estados em Ω e matriz de transição P, um acoplamento markoviano de P é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\Omega \times \Omega$ e matriz de transição Q satisfazendo*

$$\sum_{y' \in \Omega} Q\left((x,y),(x',y')\right) = P(x,x'), \ \forall x,y,x' \in \Omega,$$

e

$$\sum_{x' \in \Omega} Q\left((x,y),(x',y')\right) = P(y,y'), \ \forall x,y,y' \in \Omega.$$

Observação 4.4. *Serão usados somente acoplamentos markovianos neste trabalho.*

Qualquer acoplamento markoviano com matriz de transição P pode ser modificado de forma que as duas cadeias permaneçam juntas para sempre, após o primeiro encontro simultâneo em um estado. Ou seja, se $X_s = Y_s$, então $X_t = Y_t$ para todo $t \geq s$. A Figura 4.2 abaixo ilustra este tipo especial de acoplamento.

Figura 4.2: Temos X_t e Y_t duas cadeias de Markov em $\Omega = \{0,1,2,3,4\}$, que, após o primeiro encontro, caminharão juntas para sempre.

A seguir, veremos um teorema que será utilizado para provar o Teorema da Convergência em Variação Total usando acoplamentos na Seção 5.2.

Teorema 4.1. *Seja P uma matriz de transição irredutível, com espaço de estados Ω, e distribuição estacionária π. Sejam também (X_t) e (Y_t) cadeias de Markov com espaço de estados Ω, e acoplamento $\{(X_t, Y_t)\}$ satisfazendo a condição de que as cadeias permaneçam sempre juntas após o primeiro encontro entre elas. Sendo τ_{acop} o primeiro tempo em que as cadeias se encontram, e $X_0 = x$ e $Y_0 = y$, então*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - P^t(y,\cdot)\right\|_{VT} \leq \mathbb{P}_{x,y}\left\{\tau_{acop} > t\right\},$$

em que $\mathbb{P}_{x,y}\left\{\tau_{acop} > t\right\}$ indica a probabilidade de que haja encontro entre as cadeias (X_t) e (Y_t) somente após o tempo t, dado que $X_0 = x$ e $Y_0 = y$.

Demonstração. Notemos que $P^t(x,z) = \mathbb{P}_{x,y}\{X_t = z\}$ e $P^t(y,z) = \mathbb{P}_{x,y}\{Y_t = z\}$, já que (X_t) e (Y_t) são cadeias de Markov com trajetórias independentes. Como consequência, pela Definição 4.2, (X_t, Y_t) é um acoplamento de $P^t(x,\cdot)$ e $P^t(y,\cdot)$. Pela Proposição 4.2, temos que

$$\left\|P^t(x,\cdot) - P^t(y,\cdot)\right\|_{VT} \leq \mathbb{P}_{x,y}\{X_t \neq Y_t\}. \tag{4.9}$$

Como já definimos este acoplamento especial como um acoplamento em que duas cadeias caminham sempre juntas após o primeiro encontro, temos que se duas cadeias estão num certo tempo t em estados diferentes, então elas ainda não se encontraram, ou seja, $\tau_{acop} \geq t$. Reciprocamente, se $\tau_{acop} \geq t$, então até o tempo t as cadeias ainda não se encontraram, ou seja, $X_t \neq Y_t$. Escrevemos, assim,

$$\mathbb{P}_{x,y}\{X_t \neq Y_t\} = \mathbb{P}_{x,y}\left\{\tau_{acop} > t\right\}. \tag{4.10}$$

Pelas equações (4.9) e (4.10), obtemos a desigualdade que queríamos. □

Corolário 4.1. *Com as condições do Teorema 4.1, temos*

$$d(t) \leq \max_{x,y\in\Omega} \mathbb{P}_{x,y}\left\{\tau_{acop} > t\right\}.$$

De fato, usando a primeira desigualdade do Lema 4.1, o Teorema 4.1 e a definição de $\bar{d}(t)$, obtemos

$$d(t) \leq \bar{d}(t) = \max_{x,y\in\Omega} \left\|P^t(x,\cdot) - P^t(y,\cdot)\right\| \leq \max_{x,y\in\Omega} \mathbb{P}_{x,y}\left\{\tau_{acop} > t\right\}.$$

4.4.2 Limitantes para o tempo de mistura do passeio aleatório no n-ciclo

Consideremos o passeio aleatório preguiçoso no n-ciclo, ou seja, um passeio em que sendo $x \in \{0, 1, ..., n-1\}$, temos

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se} \quad x \equiv y (mod\ n), \\ \frac{1}{4}, & \text{se} \quad \left|x - y\right| \equiv 1 (mod\ n), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em outras palavras, há uma probabilidade $\frac{1}{2}$ de o estado seguinte ser o mesmo do anterior, e probabilidade $\frac{1}{4}$ de a cadeia se movimentar em cada um dos sentidos (horário ou anti-horário).

Construiremos um acoplamento (X_t, Y_t) de duas partículas realizando passeios aleatórios em $\mathbb{Z}_n$, uma começando em x e a outra em y, com $x, y \in \mathbb{Z}_n$. Neste acoplamento, as duas partículas nunca se moverão simultaneamente, para garantir que uma partícula não salte sobre a outra quando a distância entre elas for unitária (além de que se n for par, e a distância inicial entre as partículas for ímpar, elas nunca se encontrarão). Em cada movimento, lançamos uma moeda honesta, com resultado independente dos resultados dos lançamentos anteriores. Se a face superior da moeda for cara, (X_t) dá um passo, com sentido determinado por um outro lançamento independente da mesma moeda honesta. Se a face superior da moeda for coroa, (Y_t) dá um passo seguindo o mesmo padrão: o sentido será determinado por outro lançamento independente da mesma moeda honesta. É de se notar que cada trajetória obedece de fato ao passeio preguiçoso, já que há probabilidade $\frac{1}{2}$ de cada partícula não se mover em um determinado tempo t, e $\frac{1}{2}$ de se mover neste tempo t, sendo esta última probabilidade dividida igualmente entre os movimentos horário e os anti-horário. Uma vez que as partículas se encontram, passarão a andar sempre juntas.

Seja D_t a distância horária (a partir de X_t) entre X_t e Y_t. É possível notar que D_t se comporta como um passeio aleatório simples nos estados $\{0, 1, 2, ..., n\}$, com estados absorventes 0 e n, ou seja, D_t é modelado pelo Problema da Ruína do Jogador. De fato, a distância entre as partículas se comporta como um estado entre 0 e n, e enquanto D_t não for 0 ou n, teremos $D_{t+1} = D_t + 1$ ou $D_{t+1} = D_t - 1$, já que a cada passo somente uma partícula se moverá. Os estados 0 e n são absorventes, pois quando as trajetórias se encontram, seguirão sempre juntas, ou seja, a distância será sempre a mesma, notando que a distância n entre dois estados indica que os estados coincidem, já que o n-ciclo possui n estados.

Pelo resultado obtido na Seção 3.3, se $\tau_{acop} := min\{t \geq 0 \mid D_t \in \{0, n\}\}$ é o primeiro tempo em que X_t e Y_t se encontram, então $\mathbb{E}_{x,y}(\tau_{acop}) = k \cdot (n - k)$. Assim, temos

$$d(t) \leq \max_{x,y \in \mathbb{Z}_n} \mathbb{P}_{x,y} \left\{ \tau_{acop} > t \right\} \leq \frac{max_{x,y} \mathbb{E}_{x,y}(\tau)}{t} \leq \frac{n^2}{4t}. \tag{4.11}$$

A primeira desigualdade é obtida diretamente do Corolário 4.1. A segunda desigualdade é explicada pela desigualdade de Tchebychev, vista na Proposição 3.1. A terceira desigualdade é obtida encontrando o valor máximo de $k \cdot (n - k)$, que é $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ (resultado conseguido quando n for par e k for igual a $\frac{n}{2}$).

O lado direito da desigualdade (4.11) é $\frac{1}{4}$ quando $t = n^2$. Com isso, temos que $t_{mix} \leq n^2$.

Portanto, usando a Afirmação 4.2, obtemos

$$t_{mix}(\epsilon) \leq \left\lceil log_2 \epsilon^{-1} \right\rceil \cdot n^2,$$

que nos fornece um limitante de tempo para que um a distribuição de probabilidade de um passeio aleatório no n-ciclo esteja a uma distância em variação total de, no máximo, ϵ da distribuição estacionária π, que é a distribição uniforme.

Observação 4.5. *Para ver que a distribuição estacionária π de um passeio aleatório no n-ciclo com matriz de transição P é a distribuição uniforme, basta notar que a soma de cada coluna da matriz P é 1. Isto implica, imediatamente, que $\pi = \pi \cdot P$.*

4.4.3 Limitantes para o tempo de mistura do passeio aleatório no hipercubo

Vamos agora calcular limitantes para o tempo de mistura no passeio aleatório no hipercubo $\{0, 1\}^n$. Usaremos, para isso a noção de passeio aleatório preguiçoso no hipercubo, vista no final da Seção 3.5. Uma forma alternativa de representar tal passeio é imaginar que, em cada passo, escolhemos aleatoriamente uma das n coordenadas, e "atualizamos"seu valor, lançando uma moeda honesta, em que o novo valor da coordenanda escolhida é 1 se a face superior da moeda for cara, e 0 se for coroa. De fato, há probabilidade $\frac{1}{2}$ de trocarmos o valor da coordenada escolhida, como no passeio aleatório preguiçoso. A probabilidade $\frac{1}{2}$ restante é distribuída igualmente entre as n posíveis trocas de valores das coordenadas (uma possível troca para cada coordenada, já que o valor de cada uma delas pertence ao conjunto $\{0, 1\}$). Como vimos na Seção 3.5, a escolha de um passeio preguiçoso, neste caso, evita a periodicidade.

Sendo (X_t) e (Y_t) dois passeios aleatórios no hipercubo, faremos o acoplamento entre eles, usando a seguinte técnica: se escolhermos a coordenada j, com $1 \leq j \leq n$, atualizaremos simultaneamente as j-ésimas coordenadas dos passeios (X_t) e (Y_t). Com isso, após escolhermos todas as coordenadas, fica claro que os dois passeios coincidirão (é notório que os passeios podem coincidir antes, caso a última coordenada a ser escolhida possua valores iguais nos dois passeios, desde o início).

Seja τ_{acop} o primeiro tempo em que todas as coordenadas tenham sido escolhidas ao menos uma vez. A distribuição de τ_{acop} deste exemplo é idêntica à distribuição de τ_{acop} do exemplo do colecionador de figurinhas, visto na Seção 3.4. De fato, neste exemplo, τ_{acop} representa a quantidade de figurinhas obtidas necessárias para que o colecionador complete o álbum. Analogamente, neste exemplo queremos saber o tempo necessário para que todas as n coordenadas sejam escolhidas. Notemos que as distribuições de probabilidade de retirar um certo tipo de figurinha e de escolher uma certa coordenada são uniformes.

Assim, temos

$$d(\lceil n \cdot ln\ n + cn \rceil) \leq \mathbb{P}\left\{\tau_{acop} > \lceil n \cdot ln\ n + cn \rceil\right\} \leq e^{-c}, \tag{4.12}$$

em que a primeira desigualdade é obtida pelo Corolário 4.1 e a segunda desigualdade é justificada na Proposição 3.5.

Com isso, se tomarmos $e^{-c} = \epsilon$, teremos $c = ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$, portanto

$$t_{mix}(\epsilon) \leq \lceil n \cdot ln\ n + cn \rceil \leq \left\lceil n \cdot ln\ n + n \cdot ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right\rceil,$$

em que a primeira desigualdade é obtida da equação (4.12), notando que $d\left(\lceil n \cdot ln\ n + cn \rceil\right) \leq e^{-c} = \epsilon \Rightarrow t_{mix}(\epsilon) \leq \lceil n \cdot ln\ n + cn \rceil$. A segunda desigualdade vem direto de $c = ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$.

Conseguimos, portanto, também para este modelo, um limitante de tempo para que uma distribuicão de probabilidade de um passeio aleatório no hipercubo esteja a uma distância em variação total de, no máximo, ϵ da distribuicao estacionaria π, que é a distribição uniforme. Os argumentos para mostrar que a distribuição uniforme é estacionária são os mesmos vistos na Observação 4.5.

Capítulo 5

Teorema de Convergência em Variação Total

Agora que já temos ferramentas suficientes, iremos enunciar e demonstrar o Teorema da Convergência em Variação Total de Cadeias de Markov, que requer algumas condições (aperiodicidade e irredutibilidade da cadeia) que garantem a convergência de todas as linhas da matriz P^t para a distribuição estacionária, ou seja, garante que, nestas condições, qualquer distribuição $P^t(x, \cdot)$, com $x \in \Omega$, se aproxima (na noção de distância em variação total vista na Definição 4.1 ou suas caracterizações posteriores) da distribuição estacionária π.

A demonstração será feita de duas formas: a primeira será basicamente pautada em operações (inclusive uma indução) com matrizes e vetores. A segunda, porém, é mais curta, mais elegante, e lança mão da noção de acoplamento entre distribuições e alguns resultados conseguintes.

Teorema 5.1 (Teorema da Convergência)**.** *Seja P uma cadeia de Markov irredutível e aperiódica, com espaço de estados Ω e distribuição estacionária π. Então existem constantes $\alpha \in (0, 1)$ e $C > 0$ tais que*

$$d(t) := \max_{x\in\Omega} \left\|P^t(x, \cdot) - \pi\right\|_{VT} \leq C \cdot \alpha^t. \tag{5.1}$$

Observemos que o lado direito da desigualdade converge para 0 quando $t \to \infty$, já que C é uma constante e α pertence ao conjunto $(0, 1)$. C deve ser uma constante positiva, já que a distância em variação total entre duas duas distribuições é sempre não-negativa. Assim, o Teorema 5.1 diz que se P é uma matriz aperiódica e irredutível, com distribuição estacionária π, então P^t convergirá para uma matriz com todas as linhas iguais a π, quando $t \to \infty$.

Observação 5.1. *Se não impusermos a aperiodicidade e a irredutibilidade, o Teorema da Convergência falha. De fato, sejam as matrizes P e Q definidas como*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que P é redutível, já que seus dois estados são absorventes. Além disso, Q é aperiódica, já que os tempos de retorno de ambos os estados é sempre par. Não é difícil notar que $\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é auto-vetor à esquerda tanto de P quanto de Q. Com isso, temos que π é a distribuição estacionária de P e Q. Contudo,

$$P^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{para qualquer inteiro positivo } r,$$

$$Q^r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para qualquer inteiro positivo ímpar } r,$$

$$Q^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{para qualquer inteiro positivo par } r.$$

Como

$$\left\| (0,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\|_{VT} = \left\| (1,0) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\|_{VT} = \frac{1}{2},$$

fica claro que o Teorema da Convergência não vale para P e Q.

5.1 Primeira demonstração do Teorema da Convergência

Como P é, por hipótese, irredutível e aperiódica, pela Proposição 2.2, existirá um inteiro positivo r tal que P^r tenha somente entradas positivas.

Seja Π a matriz com $|\Omega|$ linhas, em que cada linha é representada pelo vetor π. Para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno, vale que

$$P^r(x, y) \geq \delta \cdot \pi(y),$$

para todos $x, y \in \Omega$. De fato, como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado e ilimitado superiormente, então vale a propriedade Arquimediana (uma prova deste fato pode ser vista em [E. Lima], na página 75).

Tomando $\theta = 1 - \delta$, a equação

$$P^r = (1 - \theta) \cdot \Pi + \theta \cdot Q$$

define uma matriz estocástica Q.

De fato,

$$\sum_{y\in\Omega} Q(x,y) = \frac{\sum_{y\in\Omega} P^r(x,y) - (1-\theta)\cdot\sum_{y\in\Omega}\Pi(x,y)}{\theta} = \frac{1-(1-\theta)}{\theta} = 1,$$

para todo $x \in \Omega$. A primeira igualdade é justificada pelo fato de P^r e Π serem ambas estocásticas.

Afirmação 5.1. *Se M é uma matriz estocástica, então $M \cdot \Pi = \Pi$.*

De fato, sendo $i, j \in \Omega$, cada elemento $(M\Pi)_{ij}$ pode ser escrito como

$$(M\Pi)_{ij} = \sum_{1\le a\le|\Omega|} M_{ia}\cdot\Pi_{aj} = \pi(j)\cdot\sum_{1\le a\le|\Omega|} M_{ia} = \pi(j) = \Pi_{ij},$$

em que a segunda e a quartas desigualdades se justificam pelo fato de que definimos Π com todas as linhas sendo vetores π, logo $\Pi_{aj} = \Pi_{ij}$ depende unicamente de j e vale $\pi(j)$. A terceira desigualdade é explicada pelo fato de M ser estocástica.

Afirmação 5.2. *Se $\pi \cdot M = \pi$, então $\Pi \cdot M = \Pi$.*

De fato, como todas as linhas de Π são formadas pelo vetor π, a afirmação se torna imediata.

Vamos provar, por indução em k, que

$$P^{rk} = \left(1-\theta^k\right)\cdot\Pi + \theta^k\cdot Q^k, \tag{5.2}$$

para $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Para $k = 1$, devemos ter $P^r = (1-\theta)\cdot\Pi + \theta\cdot Q$, o que já é verdade, por hipótese.

Assumindo que a equação (5.2) vale para $k = n$, temos

$$\begin{aligned} P^{r(n+1)} = P^{rn+r} = P^{rn}\cdot P^r &= [(1-\theta^n)\cdot\Pi + \theta^n Q^n]\cdot P^r \\ &= [1-\theta^n]\cdot\Pi P^r + \theta^n Q^n P^r \\ &= [1-\theta^n]\cdot\Pi P^r + \theta^n Q^n\cdot[(1-\theta)\cdot\Pi + \theta Q] \\ &= [1-\theta^n]\cdot\Pi P^r + [1-\theta]\cdot\theta^n Q^n\Pi + \theta^{n+1}\cdot Q^n\cdot Q \\ &= [1-\theta^n]\cdot\Pi + [1-\theta]\cdot\theta^n\Pi + \theta^{n+1}Q^{n+1} \\ &= \left[1-\theta^n+\theta^n-\theta^{n+1}\right]\cdot\Pi + \theta^{n+1}Q^{n+1} \\ &= \left[1-\theta^{n+1}\right]\cdot\Pi + \theta^{n+1}Q^{n+1}, \end{aligned}$$

provando a indução. A terceira igualdade usa a hipótese de indução, e a quinta utiliza o fato de que $P^r = (1-\theta)\cdot\Pi + \theta Q$. A sétima igualdade igualdade usa as duas afirmações acima: a Afirmação 5.1 para obter $Q^n\Pi = \Pi$, sabendo que Q é estocástica, e a Afirmação 5.2 para obter $\Pi P^r = \Pi$, sabendo que π é distribuição estacionária de P (e de P^r, consequentemente).

Multiplicando ambos os lados de (5.2) por P^j, obtemos

$$\begin{aligned} P^{rk+j} = \left[\left(1-\theta^k\right)\cdot\Pi + \theta^k Q^k\right]\cdot P^j &= \left(1-\theta^k\right)\cdot\Pi P^j + \theta^k Q^k P^j \\ &= \left(1-\theta^k\right)\cdot\Pi + \theta^k Q^k P^j \\ &= \Pi + \theta^k\cdot\left(Q^k P^j - \Pi\right), \end{aligned} \tag{5.3}$$

em que a terceira igualdade é justificada pela Afirmação 5.2, já que π é distribuição estacionária para P^j. Com a equação (5.3), obtemos a igualdade

$$P^{rk+j} - \Pi = \theta^k\cdot\left(Q^k P^j - \Pi\right). \tag{5.4}$$

Temos, da equação (5.4), e usando o fato de que para qualquer $x_0 \in \Omega$, $\Pi(x_0,\cdot) = \pi$,

$$\frac{1}{2}\cdot\left|P^{rk+j}(x_0,\cdot) - \pi\right| = \frac{\theta^k}{2}\cdot\left|Q^k\cdot P^j(x_0,\cdot) - \pi\right|.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\sum_{x_0\in\Omega}\left|P^{rk+j}(x_0,\cdot) - \pi\right| = \theta^k\cdot\frac{1}{2}\sum_{x_0\in\Omega}\left|Q^k P^j(x_0,\cdot) - \pi\right|,$$

ou seja, para todo $x_0 \in \Omega$,

$$\left\|P^{rk+j}(x_0,\cdot) - \pi\right\|_{VT} = \theta^k\cdot\left\|Q^k P^j(x_0,\cdot) - \pi\right\|_{VT} \le \theta^k,$$

em que a desigualdade acima decorre do fato de que a distância em variação total entre duas distribuições de probabilidade varia no intervalo $[0,1]$. Se tomarmos $C = \dfrac{\theta^k}{\theta^{rk+j}} > 0$, obtemos

$$\max_{x\in\Omega}\left\|P^{rk+j}(x_0,\cdot) = \pi\right\|_{VT} \le \theta^k = C\cdot\theta^{rk+j}.$$

Sendo t um inteiro positivo tal que $t = rk + j$ (note que, pelo algoritmo da divisão, fixando k, sempre existem r e j inteiros, tais que, para qualquer t inteiro positivo, temos $t = rk + j$, contemplando, assim, todos os possíveis t inteiros positivos), e $\alpha = \theta$ (note que como $\theta = 1 - \delta$, temos $0 \le \theta \le 1$), obtemos

$$\max_{x\in\Omega}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi\right\|_{VT} \le C\cdot\alpha^t.$$

5.2 Segunda demonstração do Teorema da Convergência

Sejam X_t e Y_t duas trajetórias na cadeia de Markov P, tais que $X_0 \sim \mu$ e $Y_0 \sim \nu$, ou seja, os valores iniciais das trajetórias independentes (X_t) e (Y_t) são tomados, respectivamente, das distriuições μ e ν. Seja (X_t, Y_t) um acoplamento entre as duas trajetórias, de forma que quando $X_t = Y_t$, tenhamos $X_s = Y_s$ para todo $s \geq t$. Sendo assim, como $X_t \sim \mu P^t$ e $Y_t \sim \nu P^t$ (ou seja, $P^t(x, \cdot)$ é descrito por μP^t e $P^t(y, \cdot)$ é descrito por νP^t), pelo Teorema 4.1, temos que

$$\left\|\mu P^t - \nu P^t\right\|_{VT} \leq \mathbb{P}\left\{\tau_{acop} > t\right\}. \tag{5.5}$$

Na equação (5.5), se tomarmos $\nu = \pi$, e sabendo que $\pi P^t = \pi$, teremos

$$\left\|\mu P^t - \pi\right\|_{VT} \leq \mathbb{P}\left\{\tau_{acop} > t\right\}. \tag{5.6}$$

Lembremos que, pela aperiodicidade e irredutibilidade de P, existe um inteiro r tal que $\epsilon := \min_{x,y \in \Omega} P^r(x, y) > 0$. Fixemos um estado qualquer $x_0 \in \Omega$. Assim, a probabilidade de partirmos de x, e após r passos estarmos em x_0 é maior ou igual a ϵ. O mesmo vale partindo de y. Com isso, a probabilidade de após r passos, ambas as cadeias (uma que parte de x e outra que parte de y) não estarem em x_0 é menor ou igual a $1 - \epsilon^2$.

Continuando iterativamente este raciocínio, obtemos

$$\mathbb{P}\left\{\tau_{acop} > kr\right\} \leq (1 - \epsilon^2)^k, \tag{5.7}$$

ou seja, há uma convergência exponencial. Com isso, como $\epsilon \in (0, 1]$, temos que $\mathbb{P}\left\{\tau_{acop} < \infty\right\} = 1$. Em outras palavras, é certo que os eventos se encontrarão alguma vez em x_0. Também podemos escrever $\mathbb{P}\left\{\tau_{acop} > t\right\} \to 0$, quando $t \to \infty$.

Finalmente, pela equação (5.6), temos que, quando $t \to \infty$, $\left\|\mu P^t - \pi\right\|_{VT} \to 0$.

Assim, obtemos, equivalentemente,

$$\max_{x \in \Omega} \left\|P^t(x, \cdot) - \pi\right\|_{VT} \leq C \cdot \alpha^t,$$

para algumas constantes $C > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$, já que, como vimos na Desigualdade 5.7, o fato de que $\mathbb{P}\left\{\tau_{acop} > kr\right\} \leq (1 - \epsilon^2)^k$ garante uma convergência exponencial de $P^t(x, \cdot)$ para π.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

6.1 Conclusões

Este trabalho abordou, de forma explicativa, as ideias e conceitos acerca de cadeias de Markov. A maioria dos exemplos neste tema foram retirados do livro [Y. Peres], a principal referência bibliográfica do trabalho. Estudamos, também, outros exemplos de cadeias de Markov que não constavam nesta obra, como o Problema da Ruína do Jogador com Viés e o passeio aleatório no grafo completo. Para os resultados básicos em Probabilidade, utilizamos o livro [B. James], que auxiliou em alguns passos nas demonstrações.

O resultados precedentes ao Teorema da Convergência foram bastante úteis para evidenciar a indissociação entre Probabilidade e outras grandes áreas da matemática. Além disso, algumas ferramentas bastante criativas (como matrizes de transição e acoplamento), foram bastante importantes na simplificação de alguns problemas que aparentavam nada elementares, tornando desafiadora a resolução de alguns problemas.

Portanto, o resultado deste estudo foi bastante satisfatório, já que aborda um tema pouco explorado em cursos de graduação. Além de desenvolver a necessidade de compreensão de outras áreas da Matemática, o tema também aguça as possibilidades de uso em outras áreas da ciência, onde é bastante útil. Tudo isso associado ao aprendizado de um assunto bastante interessante, tornou agradável o seu estudo, possibilitando uma compreensão fluente e natural deste tópico de Probabilidade.

6.2 Perspectivas

Esperamos, com este trabalho, atrair os olhos dos estudantes de graduação à área de Probabilidade, sobretudo em cadeias de Markov, visto que há uma relação considerável com este campo e outras áreas da ciência.

A facilidade de representação de alguns exemplos de cadeias em modelos concretos também é notável, já que torna possível a apresentação deste assunto, ainda que não tão aprofundadamente, para pessoas ainda com pouco contato em Matemática. Sendo possível, pois, criar alguns resultados que contrariam a intuição, desenvolvendo o interesse, através da ludicidade, por esta área ainda pouco conhecida por muitos.

Pretendemos continuar, no futuro, o estudo em Probabilidade, buscando algumas novas aplicações. A bibliografia principal deste trabalho possui ainda uma quantidade grande de temas a serem explorados, e ela pode ser a corrente de um estudo próximo. Alguns temas interessantes, como o estudo do embaralhamento de cartas (e suas aplicações em outros ramos, como a Genética) e o Fenômeno de *Cut-off* (ostentando alguns problemas em aberto), que foram candidatos a tema desta monografia, podem ser a base de um novo estudo.

Bibliografia

[B. James] Barry James. *Probabilidade: Um curso em nível intermediário.* IMPA, Projeto Euclides, 304 páginas, 2004.

[E. Lima] Elon Lages Lima. *Curso de análise*, vol.1. IMPA, Projeto Euclides, 431 páginas, 2010.

[H. Pollman] Héctor Soza Pollman. *Equações de Recorrência*. Revista Eureka!, vol.9, 2000.

[Y. Peres] David A. Levin, Yuval Peres, Elizabeth L. Wilmer. *Markov Chains and Mixing Times*. American Mathematical Society, 371 páginas, 2009.