



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PGMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



DIFERENCIABILIDADE CONTÍNUA DA MÉDIA DE CLUSTERS POR VÉRTICE EM PERCOLAÇÃO

DIOGO SOARES DÓREA DA SILVA

Salvador - Bahia

Agosto de 2015

DIFERENCIABILIDADE CONTÍNUA DA MÉDIA DE CLUSTERS POR VÉRTICE EM PERCOLAÇÃO

DIOGO SOARES DÓREA DA SILVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco.

Salvador - Bahia

Agosto de 2015

da Silva, Diogo Soares Dórea, 1990-

Diferenciabilidade Contínua da Média de Clusters por Vértice em Percolação / Diogo Soares Dórea da Silva. - 2015.

95 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2015.

1. Percolação. 2. Diferenciabilidade contínua de $\kappa(p)$. I. Franco, Tertuliano Franco Santos. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDD : 510

CDU : 519.2

DIFERENCIABILIDADE CONTÍNUA DA MÉDIA DE CLUSTERS POR VÉRTICE EM PERCOLAÇÃO

DIOGO SOARES DÓREA DA SILVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 10 de Agosto de 2015.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Bernardo Nunes Borges de Lima
UFMG

Profa. Dra. Luciana Silva Salgado
UFBA

*Dedico este trabalho
à toda minha família,
e a Helen*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais, por toda a referência que são para mim, empenhando todo o esforço possível para o meu bem-estar e formação acadêmica. A eles agradeço também por entenderem minha ausência neste momento de dor e perda para toda a família, assim como peço desculpas por ter dedicado pouco tempo a eles. Agradeço à minha irmã pelo amor, companhia e amizade que nos permeiam desde sempre. Agradeço a todos os meus familiares tanto de Feira de Santana quanto de Campina Grande. Tenho o prazer de ter parentes tão queridos, em especial as minhas duas avós, que sempre se preocuparam com o meu futuro. Este trabalho tem o toque delas, e ainda que tenha perdido há poucos meses minha avó paterna, deixando um enorme vazio em todos, sei que suas lições serão para toda a vida.

Agradeço bastante à minha namorada e grande companheira, Helen, pelos momentos de amor, carinho, compreensão, força, aconselhamento e diversão nestes últimos anos. Com ela, minhas tristezas, solidão, incertezas e preocupações foram amainadas. Sem ela, o caminho seria muito mais espinhoso, com certeza. Representando meu norte há mais de cinco anos, Helen vem me ajudando em tudo que precisei, não medindo esforços para tal. Agradeço também à paciência por ter compreendido, nestes últimos meses, o fato de eu ter sido menos paciente e mais ausente. Além disso, tenho que agradecer também pela família de Helen, a minha segunda família, por me receber de forma tenra em todos os momentos.

Agradeço a todos os meus amigos de Feira de Santana, pela companhia e amizade, assim como sou muito grato pelos amigos que fiz no mestrado. Os momentos com eles vividos nesses últimos dois anos foram bastante intensos e proveitosos.

Sou grato demais ao Professor Tertuliano por ter aceitado fazer mais este trabalho comigo, mantendo a mesma atenção, disponibilidade, profissionalismo, dedicação e paciência de sempre. Tive a sorte de ter um orientador tão humano e compreensivo, que soube lidar de maneira extremamente habilidosa com todas as turbulências por que passei. Suas ajudas são de grandioso valor para qualquer iniciante na área.

Agradeço também aos professores Bernardo e Luciana, que aceitaram compor a minha banca de dissertação, e se disponibilizaram a ler este trabalho, apon-

tando os erros e sugerindo melhorias, a fim de atenuar as imperfeições deste texto.

Apenas palavras não conseguem traduzir minha gratidão com todos vocês, tampouco sendo vocês quem são para mim.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

*“Procurei encontrar inspiração
Num recanto de terra pequenina
Pra fazer um poema em descrição
Das histórias da vida nordestina
Mas olhando para a força dessa gente
Vi que um verso não é suficiente
Pra mostrar a beleza do que vejo
Um poema seria um disparate
Não há verso no mundo que retrate
A grandeza do povo sertanejo”.*

Maurício Menezes

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar e apresentar alguns resultados em Percolação homogênea de elos para grafos hipercúbicos. O resultado principal deste trabalho é a diferenciabilidade contínua de $\kappa(p)$, o número médio de aglomerados por vértice no grafo. Para obtermos este resultado, serão utilizados argumentos em áreas distintas da Matemática, principalmente em Probabilidade, Combinatória e Teoria dos Grafos.

Palavras-chave: percolação de elos; animais no grafo; diferenciabilidade contínua de $\kappa(p)$.

Abstract

The aim of this dissertation is to study and present some results in homogeneous bond percolation for hypercubic graphs. The main result in this work is the continuous differentiability of $\kappa(p)$, the average number of clusters per vertex in the graph. To obtain this result, it will be used arguments in different areas of mathematics, especially in Probability, Combinatorics and Graph Theory.

Keywords: bond percolation; lattice animals; continuous differentiability of $\kappa(p)$.

Sumário

Introdução	1
1 Modelo e Resultados	4
1.1 Modelo de Percolação de Elos	4
1.2 A Função $\theta(p)$ e o Fenômeno Crítico	8
1.3 As Funções $\chi(p)$ e $\kappa(p)$ e Alguns Resultados Básicos	19
1.4 Resultados Importantes em Percolação	22
2 Ferramentas	24
2.1 Eventos Crescentes	24
2.2 Desigualdade de FKG	26
2.3 Desigualdade de BK	32
2.4 Fórmula de Russo	35
2.5 Teorema Ergódico	41
3 Diferenciabilidade de $\kappa(p)$	43
3.1 Preliminares	43
3.2 Lattice Animals e Grandes Desvios	47
3.3 Diferenciabilidade de $\kappa(p)$	59
3.4 Há diferenciabilidade contínua de $\kappa(p)$ para $p = 1$?	73
3.5 Um resultado geral	76
4 Perspectivas Futuras	78
Referências Bibliográficas	79
Índice Remissivo	81

Lista de Figuras

1.1	Parte do grafo \mathbb{L}^1	5
1.2	Parte do grafo \mathbb{L}^2	6
1.3	O gráfico de $\theta(p)$ em dimensão um.	10
1.4	O grafo \mathbb{L}^2 , e seu dual, o grafo $(\mathbb{L}^2)^*$	15
1.5	Elo e em \mathbb{L}^2 e seu correspondente e^* em $(\mathbb{L}^2)^*$	15
1.6	Circuito tracejado envolvendo cluster da origem.	16
1.7	Um exemplo em que $ C = 5$ em $\mathbb{L}^1 = (\mathbb{Z}, \mathbb{E}^1)$	21
1.8	O gráfico de $\kappa(p)$ é linear em dimensão $d = 1$	22
2.1	Elos e'_1 e e''_1 passam a substituir e_1	34
2.2	Os elos fechados e_1, e_2 e e_3 são os únicos pivotais para (A, ω_1)	36
3.1	Animal do conjunto $\mathcal{A}_{17,19,26}$ em \mathbb{L}^2	48
3.2	Ilustração da função $g_m(y)$	55

Introdução

O estudo do modelo de percolação foi proposto em 1957, por Broadbent e Hammersley, por meio do artigo [BH], visando traduzir matematicamente o fenômeno de transporte de fluido em meio poroso. Para tanto, se empregou fortemente noções de Teoria dos Grafos e Combinatória, e fez despontar uma robusta fonte de problemas intrigantes, dentre os quais muitos ainda permanecem em aberto, não obstante a simplicidade de seus enunciados. Desde então, inúmeras modalidades do modelo foram postas, muitas das quais nasceram da análise de fenômenos físicos. Atualmente, modelos de Percolação dão provisão a uma gama considerável de campos da ciência, como Física (Eletromagnetismo dentre tantas sub-áreas), Geologia (erosão) e Epidemiologia (propagação de epidemias). Neste trabalho, salvo menção em contrário, o modelo estudado será de percolação homogênea de elos (ou arestas) no grafo hipercúbico $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, para dimensão $d \geq 1$. Entretanto, serão exibidos alguns exemplos que não se enquadram neste padrão. A grosso modo, no estudo da percolação homogênea de elos, que é o caso mais simples, associamos dois possíveis estados para cada elo do grafo, de forma independente, com mesmo parâmetro p para todos os elos: o elo (fisicamente, interpretamos como um canal) pode estar aberto ou fechado, possibilitando ou não a passagem de fluido por ele. A pergunta central desta teoria é se há o transporte deste fluido, a partir da origem, através de infinitos elos – em caso afirmativo, diz-se que houve percolação. Todas essas definições, e as que serão citadas doravante ainda nesta introdução serão elucidadas com cuidado no capítulo seguinte, com o devido rigor.

Os pioneiros desta área, Broadbent e Hammersley, mostraram ainda em 1957, a existência de uma transição de fase em \mathbb{L}^d , para $d \geq 2$. Kesten, um dos mais prolíficos estudiosos em Percolação, provou, em 1980, que para dimensão $d = 2$, esta transição de fase ocorre quando $p = \frac{1}{2}$ (que será chamado de ponto crítico em dimensão 2), e, em 1982, lançou seu livro *Percolation Theory for Mathematicians*, [Kesten(1982)], com um compêndio apreciável de resultados na área, dentre os quais muitos eram originais. Em 1986, Menshikov e Aizenman-Barsky, provaram independentemente a unicidade do ponto crítico. No ano seguinte, Aizenman-Kesten-Newman provaram, em [AKN], que para p maior que o ponto crítico, há um unico aglomerado conexo e infinito de elos abertos atravessando o meio.

O final dos anos 80 e início dos anos 90 ficaram marcados pelo estudo da continuidade de $\theta(p)$, a função que informa a probabilidade de haver percolação em função do parâmetro p . Resultados obtidos por Harris (1960) e Kesten (1980) implicam na continuidade de $\theta(p)$ para $d = 2$. Hara e Slade, em 1990, mostraram a continuidade de $\theta(p)$ para dimensões suficientemente grandes. Quatro anos depois, exibiram uma cota: $\theta(p)$ é contínua para dimensões superiores a 18. Para $3 \leq d \leq 18$, acredita-se que haja continuidade para $\theta(p)$, mas ainda não há uma comprovação para este resultado. Esta é, provavelmente, a principal conjectura em Percolação nos dias atuais.

Seguiremos, como referência principal, a segunda edição do livro *Percolation* [Grimmett], que data de 1998, sendo a obra que norteia grande parte das pessoas que iniciam estudo em Percolação. Como referência alternativa, adota-se a monografia *Notas em Percolação* [Fontes], de Fontes, de cuja algumas demonstrações foram acolhidas. A seguir, descreveremos a estrutura desta dissertação.

No primeiro capítulo, introduzimos a definição de modelo de percolação homogênea de elos com parâmetro p em $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$. Algumas definições iniciais serão determinantes para compreender o fenômeno, como algumas noções em Teoria dos Grafos, como caminho, distância e cluster (ou aglomerado) por exemplo. Serão explicados, de forma mais cautelosa, algumas definições expostas supracitada-mente, como a ideia de ponto crítico, fase subcrítica e supercrítica e mais algumas asserções sobre a função $\theta(p)$, além das funções $\chi(p)$ e $\kappa(p)$, esta última figurando como protagonista neste trabalho. Em palavras, $\kappa(p)$ significa a esperança da razão entre clusters e vértices no grafo. Ademais, trataremos de alguns resultados iniciais bastante elegantes, como a prova da não-trivialidade do valor do ponto crítico em dimensão maior que 2, além de exibirmos alguns resultados já existentes em Percolação.

O segundo capítulo versará sobre três ferramentas assaz relevantes para a Percolação, a saber, a Desigualdade de BK, a Desigualdade de FKG e a Fórmula de Russo, e para este fim, faremos inicialmente algumas definições, sendo a de maior relevo, a noção de evento crescente. Desfechamos o capítulo com a apresentação de um teorema ergódico, que servirá para provarmos os resultados do capítulo vindouro.

O terceiro e principal capítulo se inicia com um resultado preliminar acerca da relação entre certas médias espaciais e a função $\kappa(p)$. Posteriormente, será abordada a definição de animal, juntamente com algumas cotas combinatórias em Teoria dos Grafos, que serão vitais para a demonstração de um teorema que nos dá uma informação qualitativa para o formato de um cluster suficientemente grande. Este teorema será a base para a demonstração da diferenciabilidade contínua de $\kappa(p)$, o principal resultado deste trabalho. Ainda mais, enunciaremos alguns re-

sultados que generalizam este último, e, por fim, enunciamos um resultado devido a Aizenman, Kesten e Newman, que demonstra a diferenciabilidade contínua de $\kappa(p)$ para grafos bastante gerais, assim como citaremos a ocorrência de unicidade do cluster infinito para p maior que o ponto crítico, dada por estes mesmos autores, no artigo [AKN], de 1987. Pela fama alcançada pela demonstração invulgar e sucinta dada em [Burton-Keane], dois anos depois, a primeira prova ficou relativamente menos divulgada na área.

No quarto e último capítulo, consideraremos os possíveis trabalhos futuros, dando continuidade no estudo iniciado com este trabalho.

Capítulo 1

Modelo e Resultados

Este capítulo traz as definições básicas, as notações utilizadas, o modelo de percolação de elos e alguns resultados importantes na área. Para um primeiro contato, este capítulo é, pois, indelével para o entendimento pleno deste trabalho.

1.1 Modelo de Percolação de Elos

Como salientamos na Introdução, este trabalho está pautado em percolação de elos em \mathbb{Z}^d , havendo citação em contrário caso tratemos de outra modalidade de percolação. A partir de então, introduziremos alguns conceitos iniciais.

Definição 1.1. Escrevemos $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ para o conjunto de todos os números inteiros e \mathbb{Z}^d para o conjunto de todos os pontos $x = (x_1, \dots, x_d)$, com x_1, \dots, x_d números com valores inteiros. Para $x \in \mathbb{Z}^d$, escrevemos x_i para a i -ésima coordenada do ponto x .

Definição 1.2. Dados dois pontos $x, y \in \mathbb{Z}^d$, definimos a distância entre eles como

$$\delta(x, y) := \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|,$$

ou seja, usamos a norma da soma para medir distância entre pontos de \mathbb{Z}^d . Naturalmente, escrevemos $|x|$ para a distância $\delta(0, x)$ do ponto x à origem.

A definição de distância usando a norma da soma é vantajosa para medir comprimento de caminhos de elos, que será visto mais à frente. Em alguns momentos, é mais prático usar a norma do máximo, como para definir caixas no grafo, como será feito em seguida. Assim, definimos tal norma como segue:

Definição 1.3. Para $x, y \in \mathbb{Z}^d$, denotamos a distância entre x e y sob a norma do

máximo como

$$\|x - y\| := \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |x_i - y_i|.$$

É um fato conhecido de espaços métricos que estas normas são equivalentes, o que permite o uso de cada uma, quando conveniente.

Iremos rumar à construção do grafo de pontos em \mathbb{Z}^d , que é um dos objetivos deste capítulo. Ao adicionarmos um elo unindo cada par de pontos $x, y \in \mathbb{Z}^d$, tais que $\delta(x, y) = 1$, temos construído o conjunto de todos os elos do grafo que queremos. Denotamos por $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ o conjunto de pontos e elos do grafo construído, que é conhecido como grafo hipercúbico d -dimensional, rede hipercúbica ou simplesmente rede.

Observação 1.1. Iremos nos referir, aos pontos do grafo \mathbb{L}^d como vértices. Alguns autores os chamam de nós ou sítios, nomenclatura esta que às vezes utilizamos neste texto. Para os elos, é comum encontrarmos o termo aresta para referi-los, enquanto que, por abuso de notação, é possível encontrar a notação \mathbb{Z}^d para denotar o grafo \mathbb{L}^d .

Observação 1.2. É importante ressaltar que este modelo de percolação que está sendo definido não é o único, podendo ter inúmeras variações. Quanto à construção do grafo, pode-se, por exemplo, acrescentar elos entre vértices $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tais que $\delta(x, y) \neq 1$.

Definição 1.4. Sendo $x, y \in \mathbb{Z}^d$, se $\delta(x, y) = 1$, dizemos que x e y são adjacentes ou vizinhos mais próximos, que denotamos, neste caso, por $x \sim y$. Escrevemos $e = \langle x, y \rangle$ para o elo $e \in \mathbb{E}^d$ que une os vértices $x, y \in \mathbb{Z}^d$.

Temos abaixo, exemplos de partes do grafo \mathbb{L}^d em dimensões 1 e 2, em que 0 indica a origem do respectivo grafo, com vértices em cinza e elos em preto:

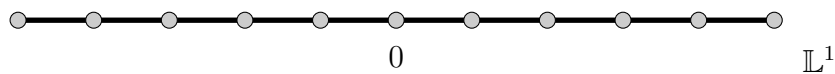


Figura 1.1: Parte do grafo \mathbb{L}^1

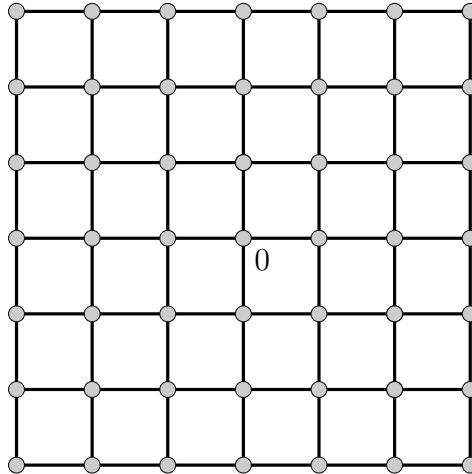


Figura 1.2: Parte do grafo \mathbb{L}^2 .

Iremos, agora, definir a parte probabilística da teoria. Sejam $p, q \in [0, 1]$ tais que $p + q = 1$. Dizemos que cada elo de \mathbb{E}^d possui probabilidade p de estar aberto e q de estar fechado, de maneira independente dos outros elos da rede. Chamamos cada uma dessas condições (aberto ou fechado) de estado do elo. Nosso espaço amostral é definido como $\Omega = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \{0, 1\}$, cujos pontos $\omega = (\omega(e); e \in \mathbb{E}^d)$ são chamados de configurações, ou configurações da rede, de forma que, para qualquer $e \in \mathbb{E}^d$, $\omega(e) = 1$ indica que o elo e está aberto, e $\omega(e) = 0$ informa que o elo e está fechado.

Denotaremos por \mathcal{F} como sendo a σ -álgebra de subconjuntos de Ω gerados pelos cilindros finito-dimensionais deste conjunto. Por fim, definimos a medida-produto de parâmetro p em (Ω, \mathcal{F}) como sendo

$$\mathbb{P}_p = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e,$$

em que μ_e tem distribuição de Bernoulli com parâmetro p em $[0, 1]$, ou seja, $\mu_e(\omega(e) = 0) = q$ e $\mu_e(\omega(e) = 1) = p$. Ademais, denotamos por \mathbb{E}_p para a esperança correspondente à medida-produto \mathbb{P}_p . O nosso espaço de probabilidades será, portanto, a terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$.

Observação 1.3. Seguiremos, neste trabalho, o modelo em que μ_e tem distribuição de Bernoulli com parâmetro fixado para todos os elos, que se chama de percolação homogênea. Todavia, existem modelos que não seguem este padrão, podendo haver probabilidades distintas para a abertura de elos do mesmo grafo.

Definição 1.5. Dadas $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ configurações da rede, dizemos que $\omega_1 \leq \omega_2$ se, e somente se, $\omega_1(e) \leq \omega_2(e)$, para todo $e \in \mathbb{E}^d$. Em palavras, teremos $\omega_1 \leq \omega_2$ quando todo elo aberto para ω_1 também está aberto para ω_2 .

Observação 1.4. Observe que a relação acima definida é uma ordem parcial para configurações, já que, em geral, não podemos comparar duas configurações quaisquer. Basta que existam dois elos e_1 e e_2 que satisfaçam as seguintes condições: e_1 está aberto em ω_1 e fechado em ω_2 , enquanto que e_2 está fechado em ω_1 e aberto em ω_2 .

Vamos, agora, apresentar uma técnica chamada acoplamento, que ajuda bastante na resolução de alguns problemas no âmbito geral do estudo de Probabilidade. Suponha que $(X(e); e \in \mathbb{E}^d)$ seja uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, indexadas para cada elo $e \in \mathbb{E}^d$, que seguem a distribuição uniforme em $[0, 1]$. Definamos, para $p \in [0, 1]$, $\eta_p \in \Omega$ como

$$\eta_p(e) = \begin{cases} 1, & \text{se } X(e) < p, \\ 0, & \text{se } X(e) \geq p. \end{cases}$$

Diremos que $e \in \mathbb{E}^d$ é um elo p -aberto se $\eta_p(e) = 1$. Caso contrário, dizemos que e é p -fechado. O vetor aleatório η_p tem entradas independentes e distribuições marginais $\mathbb{P}(\eta_p(e) = 0) = 1 - p$ e $\mathbb{P}(\eta_p(e) = 1) = p$. Com isso, foram preservados a independência e o valor das probabilidades marginais. Logo, em vez de sortearmos o estado de cada elo, podemos sortear um número real no intervalo $[0, 1]$ de maneira uniforme, determinando o estado de cada elo (sendo que para cada elo é atribuído um valor tomado também de maneira uniforme no intervalo $[0, 1]$). Chamamos este mecanismo de acoplamento, e a vantagem principal desta técnica é que, para $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$, temos $\eta_{p_1}(e) \leq \eta_{p_2}(e)$, para todo $e \in \mathbb{E}^d$, ou seja, nossas configurações são, agora, comparáveis; nenhum elo aberto se fecha ao aumentarmos o parâmetro p . Usaremos, por exemplo, a técnica de acoplamento para provar a Fórmula de Russo e o não-decrescimento da função $\theta(p)$.

Continuaremos fazendo algumas definições que serão amplamente usadas neste trabalho.

Definição 1.6. Um caminho em \mathbb{L}^d é uma sequência $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n$ de distintos vértices x_i e distintos elos $e_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$. Neste caso, dizemos que o caminho tem comprimento n (contamos o número de elos deste) e conecta x_0 a x_n . Além disso, um circuito de \mathbb{L}^d é uma sequência $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n, e_n, x_0$ de modo que $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n$ é um caminho e $e_n = \langle x_n, x_0 \rangle$. Aqui, dizemos que o circuito tem comprimento $n + 1$.

Definição 1.7. Dizemos que um caminho (ou circuito) é aberto se todos os seus elos são abertos. Analogamente definimos um caminho (ou circuito) fechado.

Agora, daremos a definição de cluster, que nos dará base para a compreensão do que é, de fato, estudado em Percolação.

Definição 1.8. *Considere um subgrafo de \mathbb{L}^d que contenha todos os vértices de \mathbb{Z}^d e apenas elos abertos. As componentes conexas deste grafo são chamados clusters (ou aglomerados) abertos.*

Sendo $x \in \mathbb{Z}^d$, denotamos por $C(x)$ o cluster aberto que contém o vértice x . Como consequência, sendo $y \in \mathbb{Z}^d$, dizemos que y pertence ao cluster $C(x)$ se há caminho de elos abertos conectando x a y (denota-se $x \leftrightarrow y$). Ou seja, $C(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d; x \leftrightarrow y\}$. Naturalmente, dizemos que um elo aberto $e \in \mathbb{E}^d$ pertence a $C(x)$ se $e = \langle w, z \rangle$, com $z, w \in \mathbb{Z}^d$ vértices de $C(x)$.

Definição 1.9. *Escrevemos $C(0)$, ou simplesmente C , quando quisermos nos referir ao cluster aberto que contém a origem.*

É importante notar que, caso não haja elo aberto incidindo no vértice $x \in \mathbb{Z}^d$, seu cluster aberto correspondente não possui elos, e só possui x como vértice. Neste caso, escreve-se $C(x) = \{x\}$. A função $\theta(p)$, principal função em Percolação, e que será definida doravante, busca informar a probabilidade de haver um cluster infinito que contenha a origem. Mas, para isso, devemos definir tamanho de um cluster.

Definição 1.10. *Seja $x \in \mathbb{Z}^d$ e $C(x)$ o cluster que o contém. Indicamos $|C(x)|$ para o número de vértices em $C(x)$. Caso haja infinitos vértices em $C(x)$, escrevemos $|C(x)| = +\infty$, e dizemos que o cluster $C(x)$ é infinito.*

Para evitar definições no decorrer do trabalho, faremos, aqui, mais uma definição, antes de passarmos à próxima seção.

Definição 1.11. *Definimos a caixa ou subgrafo $B(n) \subset \mathbb{L}^d$ como o grafo imerso em \mathbb{L}^d cujos vértices pertencem ao conjunto $\{-n, -n+1, \dots, n-1, n\}^d$ e os elos são formados pelos pares vértices deste conjunto que distam 1 entre si. Chamamos este grafo de caixa centrada na origem, com lados de comprimento $2n$. Além disso, dizemos que $|B(n)|$ é a quantidade de vértices de $B(n)$, que vale precisamente $(2n+1)^d$. Matematicamente, denotamos*

$$\mathbb{Z}^d \cap B(n) = \{x \in \mathbb{Z}^d; \|x\| \leq n\}$$

para o conjunto de vértices de $B(n)$.

1.2 A Função $\theta(p)$ e o Fenômeno Crítico

Introduziremos, neste momento, a definição de $\theta(p)$, a função mais estudada em Percolação, e na qual ainda residem alguns problemas em aberto, muitos dos quais os enunciados são bastante simples.

Definição 1.12. A função $\theta(p)$ indica a probabilidade de que o cluster aberto que contém a origem seja infinito, isto é,

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(|C| = \infty).$$

Podemos, também, expressar

$$\theta(p) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_p(|C| = n).$$

Quando o cluster que contém a origem é infinito, dizemos que há percolação (ou que o cluster que contém a origem percola). Ou seja, também nos referimos à percolação como o fenômeno de haver um cluster infinito contendo a origem.

Observação 1.5. Note que a função $\theta(p)$ só faz sentido para grafos infinitos, já que grafos finitos não podem conter cluster infinito. Usaremos $\theta(p)$ apenas na rede hipercúbica d -dimensional.

Pela própria definição de cluster aberto, é imediato ver que $|C| = \infty$ se, e somente se, existe uma sequência infinita x_0, x_1, x_2, \dots de vértices distintos tais que $x_0 = 0$, $x_i \sim x_{i+1}$ e $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ são elos abertos, para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Além disso, para $p = 0$, sabemos que não há elos abertos, logo $\theta(0) = 0$, enquanto que para $p = 1$, todos elos estão abertos, ou seja, $\theta(1) = 1$.

Observação 1.6. Em $d = 1$, a função $\theta(p)$ é facilmente encontrada. O cluster que contém a origem só será infinito se for infinito à esquerda ou à direita da origem. Nestes casos, temos k elos abertos à direita (ou à esquerda) da origem com probabilidade p^k . Quando $p \in (0, 1)$, basta tomar $k \rightarrow \infty$ para notar que não há, quase-certamente, cluster infinito contendo a origem. Para $p = 0$ e $p = 1$, aplicamos o que foi comentado logo acima. Abaixo, segue a função $\theta(p)$ para $d = 1$.

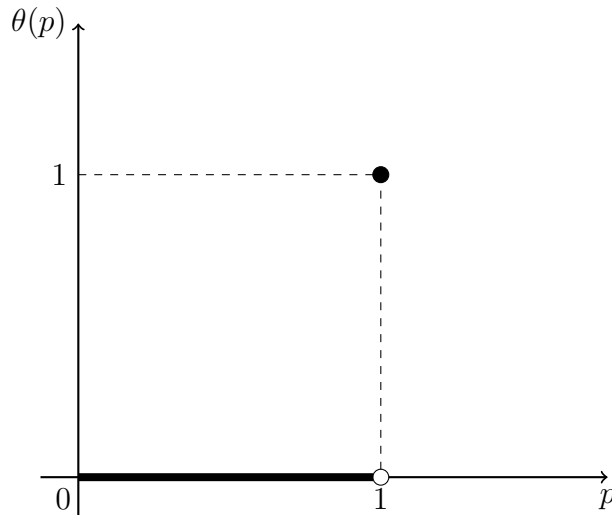


Figura 1.3: O gráfico de $\theta(p)$ em dimensão um.

Vamos, portanto, estudar $\theta(p)$ sempre para $d \geq 2$, já que a conhecemos explicitamente para $d = 1$. Não obstante, para dimensões superiores a 1, algumas questões sequer foram respondidas. Primeiramente, vamos provar que $\theta(p)$ é não-decrescente em p , usando a técnica de acoplamento descrita na seção anterior. Este é um resultado intuitivo, que se torna óbvio ao usarmos tal técnica.

Proposição 1.1. *A função $\theta(p)$ é não-decrescente em p .*

Demonstração. Sejam, respectivamente, $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ e $\tilde{\Omega} = [0, 1]^{\mathbb{E}^d}$ o espaço de configurações em que escolhemos o estado de cada elo seguindo a distribuição de Bernoulli de parâmetro p e o espaço de configurações em que cada elo assume um valor seguindo a distribuição uniforme em $[0, 1]$, e declarando todos os elos $e \in \mathbb{E}^d$ p -abertos se, e somente se, $\tilde{\omega}(e) \leq p$, em que $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$. Assim, se $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$, $\omega \in \Omega$ e $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, temos que

$$\begin{aligned} \theta(p_1) &= \mathbb{P}_{p_1} \{ \omega; |C(\omega)| = \infty \} = \mathbb{P} \{ \tilde{\omega}; |C(p_1, \tilde{\omega})| = \infty \} \\ &\leq \mathbb{P} \{ \tilde{\omega}; |C(p_2, \tilde{\omega})| = \infty \} = \theta(p_2), \end{aligned}$$

em que $|C(\omega)|$, $|C(p_1, \tilde{\omega})|$ e $|C(p_2, \tilde{\omega})|$ indicam o tamanho dos clusters que contêm a origem, de acordo com seus respectivos espaços de configurações e parâmetros de abertura de elos. A primeira e última igualdades seguem da definição de $\theta(p)$. A segunda igualdade é obtida notando que tanto a escolha seguindo a distribuição de Bernoulli quanto sua acoplada modelam o mesmo fenômeno, como já vimos. Por fim, a desigualdade advém do fato de $p_1 \leq p_2$ implicar que todo elo p_1 -aberto é também p_2 -aberto, mostrando que $\theta(p)$ é uma função não-decrescente em p . \square

Iremos, agora, definir ponto crítico, que nos encaminhará à compreensão de que há uma transição de fase no fenômeno de percolação, no sentido de que a

partir de um certo valor de p , há probabilidade positiva de haver percolação, e em contraste a isto, não há percolação antes de p , quase-certamente.

Definição 1.13. Chamamos de ponto crítico para a dimensão d o valor

$$p_c(d) = \sup\{p : \theta(p) = 0\}.$$

Observação 1.7. Como $\theta(0) = 0$ para qualquer dimensão, e $p \in [0, 1]$, que é um intervalo limitado, então o ponto crítico $p_c(d)$ está sempre bem definido. Como vimos na Observação 1.6 e na Figura 1.3, tem-se que $p_c(1) = 1$, pois, neste caso, $\theta(p) = 0$ para todo $p \in [0, 1)$.

Iremos mostrar, mais adiante, que para $d \geq 2$, $0 < p_c(d) < 1$. Com isto, poderemos escrever, para $d \geq 2$,

$$\theta(p) = \begin{cases} = 0, & \text{se } 0 \leq p < p_c, \\ > 0, & \text{se } p_c < p \leq 1. \end{cases}$$

Chamaremos, assim, o intervalo $[0, p_c)$ de fase subcrítica. O intervalo $(p_c, 1]$ é chamado de fase supercrítica. Muitos dos resultados em Percolação são válidos supondo a restrição a uma dessas fases, por isso a importância de conhecê-las. Mostraremos, agora, a monotonicidade da função $\theta(p)$ em função da dimensão, isto é, veremos que o $\theta(p)$ não tem valor diminuído com o aumento da dimensão, para todo $p \in [0, 1]$.

Proposição 1.2. Sendo $\theta_d(p)$ a função $\theta(p)$ para a dimensão d , então $\theta_d(p) \leq \theta_{d+1}(p)$, para todo $p \in [0, 1]$.

Demonstração. Construamos o modelo de percolação em d dimensões num hiperplano d -dimensional, a partir da rede $(d + 1)$ -dimensional, desde que contenha a origem. Declaremos fechados todos os elos da rede maior que não são elos do hiperplano. Os demais elos seguem o estado dos elos da rede $(d + 1)$ -dimensional. Denotando por \tilde{C} e C os clusters que contêm a origem nos modelos d -dimensional e $(d + 1)$ -dimensional, respectivamente, temos que $\tilde{C} \subset C$. Assim, temos que

$$\theta_d(p) = \mathbb{P}_{p,d+1}(|\tilde{C}| = \infty) \leq \mathbb{P}_{p,d+1}(|C| = \infty) = \theta_{d+1}(p),$$

em que a primeira igualdade segue do fato de construirmos o hiperplano inserido na rede $(d + 1)$ -dimensional, associada à definição de $\theta(p)$. A desigualdade vem do fato de termos $\tilde{C} \subset C$, enquanto que a última igualdade é também fruto da definição de $\theta(p)$. \square

Observação 1.8. A Proposição 1.2 é bastante intuitiva, já que o acréscimo (ou não-retirada) de elos abertos em um cluster não diminui a probabilidade deste cluster ser infinito, e é isso que acontece quando crescemos a dimensão da rede. Ganhamos, como consequência da Proposição 1.2, o fato de, para $d \geq 1$,

$$p_c(d+1) \leq p_c(d). \quad (1.1)$$

É possível provar que a desigualdade acima é estrita, mas nos será suficiente apenas a desigualdade não-estrita para nosso objetivo de usar a desigualdade (1.1) para provarmos que para todo $d \geq 2$, $p_c(d) < 1$. Após demonstrarmos que $p_c(2) < 1$, tal fato segue de imediato, o que mostra que (1.1) ajuda a reduzir nosso esforço em busca de tal prova.

Teorema 1.1. *Em \mathbb{L}^d , com $d \geq 2$, existe $p_c(d)$ tal que*

$$\theta(p) = \begin{cases} = 0, & \text{se } 0 \leq p < p_c, \\ > 0, & \text{se } p_c < p \leq 1. \end{cases}$$

O Teorema (1.1) foi provado em [BH], no ano de 1957, por Broadbent e Hammersley, sendo o primeiro grande resultado do ponto de vista matemático em Percolação, já que prova que, para dimensões superiores a 2, há para $\theta(p)$ um fenômeno de transição de fase.

Demonstração. Dividiremos a prova em duas partes, cada uma com um lema correspondente. O primeiro lema refere-se à existência de uma fase subcrítica, enquanto que o segundo garante que existe uma fase supercrítica. Recordamos aqui a convenção que $0 \cdot \infty = 0$.

Lema 1.1. *Existe $\tilde{p} > 0$ tal que, para todo $p < \tilde{p}$, $\theta(p) = 0$.*

Demonstração. Sabemos, pelas definições de esperança e de $\theta(p)$, que

$$\mathbb{E}_p|C| = \infty \cdot \mathbb{P}_p(|C| = \infty) + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n) = \infty \cdot \theta(p) + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n).$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n) \geq 0$, para mostrarmos que $\theta(p) = 0$, é suficiente provar que $\mathbb{E}_p|C| < \infty$, pois se, porventura, tivéssemos $\theta(p) > 0$, invariavelmente teríamos $\mathbb{E}_p|C| = \infty$. Sabemos que o tamanho do cluster que contém a origem é dado pela quantidade de vértices para os quais há um caminho de elos abertos os unindo à origem, ou seja,

$$|C| = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{(0 \leftrightarrow x)}. \quad (1.2)$$

Tomando a esperança em ambos os membros da igualdade (1.2), temos

$$\mathbb{E}_p|C| = \mathbb{E}_p \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{(0 \leftrightarrow x)} \right) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}_p (\mathbb{1}_{(0 \leftrightarrow x)}) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x), \quad (1.3)$$

em que a segunda igualdade segue da linearidade da esperança, e a última vem do fato de a esperança da função indicadora de um conjunto significar a probabilidade deste mesmo conjunto. Denotaremos por $\gamma = \langle x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k \rangle$, com $x_i \sim x_{i+1}$ e $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$, o caminho γ de elos abertos que une x_0 a x_k , passando pelos distintos vértices $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k$. Com isso, temos que

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p \left(\bigcup_{\gamma = \langle 0, \dots, x \rangle} (\gamma \text{ é aberto}) \right) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\gamma = \langle 0, \dots, x \rangle} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ é aberto}). \quad (1.4)$$

A primeira igualdade de (1.4) se justifica pelo fato de que $0 \leftrightarrow x$ se, e somente se, existe um caminho de elos abertos, passando por distintos vértices da rede, começando em 0 e terminando em x . A desigualdade segue do fato que a probabilidade de uma união enumerável de eventos é majorada pela soma das probabilidades destes eventos. Podemos particionar o conjunto de todos os caminhos γ não mais levando em consideração o último vértice de γ , mas sim, a quantidade de elos deste caminho. Com isto, temos

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\gamma = \langle 0, \dots, x \rangle} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ é aberto}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\gamma: |\gamma|=k} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ é aberto}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\gamma: |\gamma|=k} p^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p^k \sum_{\gamma: |\gamma|=k} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} p^k \cdot \sigma(k), \end{aligned} \quad (1.5)$$

em que $\sigma(k)$ representa o número de caminhos partindo da origem, com k elos, que não passa mais de uma vez em cada vértice. A primeira igualdade de (1.5) segue da partição que comentamos no parágrafo anterior, notando que o caminho, por não repetir vértices nem elos, sempre possui em quantidade de vértices uma unidade a mais que a quantidade de elos. A segunda igualdade vem do fato de que cada elo é aberto com probabilidade p , de maneira independente. A penúltima igualdade vem do fato de p^k depender apenas do comprimento do caminho γ , enquanto que a última decorre da definição de $\sigma(k)$. Por (1.3), (1.4) e (1.5), temos que

$$\mathbb{E}_p|C| \leq \sum_{k=1}^{\infty} p^k \cdot \sigma(k). \quad (1.6)$$

Encontrar uma cota exata para $\sigma(k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, ainda é um problema em

aberto em Combinatória. Contudo, consegue-se uma cota superior para tal expressão.

Afirmção 1.1. *Para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se que $\sigma(k) \leq 2d(2d - 1)^{k-1}$.*

De fato, um caminho de k elos que começa pela origem tem $2d$ possibilidades de escolha para o vértice seguinte. A partir daí, para cada elo, tem-se, no máximo $(2d - 1)$ possibilidades de escolha, já que não podemos retornar ao vértice anterior. Como são $2k - 1$ elos restantes, segue que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\sigma(k) \leq 2d(2d - 1)^{k-1}$, provando a Afirmção 1.1.

Pela desigualdade (1.6) e pela Afirmção 1.1, segue que

$$\mathbb{E}_p|C| \leq \sum_{k=1}^{\infty} p^k \cdot (2d) \cdot (2d - 1)^{k-1} = 2dp \cdot \sum_{k=1}^{\infty} [p(2d - 1)]^{k-1} < +\infty,$$

se $p(2d - 1) < 1$, ou seja, se $p < \frac{1}{2d - 1} =: \tilde{p}$, já que d é fixado, $p \in [0, 1]$ e a última série é uma série geométrica. Logo, como exibimos o valor de \tilde{p} que satisfaz $\theta(p), \forall p < \tilde{p}$, temos provado o Lema 1.1. \square

O seguinte resultado é consequência direta do Lema 1.1, associado ao fato de $p_c(1) = 1$:

Escólio 1.1. *Para todo $d \geq 1$, $p_c(d) \geq \frac{1}{2d - 1}$.*

Lema 1.2. *Existe $\hat{p} < 1$ tal que, para todo $p > \hat{p}$, $\theta(p) > 0$.*

Demonstração. Pela expressão (1.1), se mostrarmos que $p_c(2) < 1$, teremos mostrado que $p_c(d) < 1$, para todo $d \geq 2$, ou seja, que existe $\hat{p} < 1$ tal que, para todo $p > \hat{p}$, $\theta(p) > 0$. Nosso trabalho, portanto, se resumirá a provar que $p_c(2) < 1$. Todos os nossos passos, nesta demonstração, seguirão o fato de estarmos trabalhando em duas dimensões. O método central utilizado nesta prova chama-se argumento de Peierls, em homenagem ao físico Rudolph Peierls, que o usou no artigo [Peierls] sobre modelo de Ising, no ano de 1936, datando de mais tempo que o próprio estudo de Percolação.

Seja $\mathbb{L}^2 = (\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ o grafo planar quadrangular. Definimos $(\mathbb{L}^2)^*$ como o grafo planar quadrangular com vértices em $(x + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); x \in \mathbb{Z}^2)$. Os elos de $(\mathbb{L}^2)^*$ seguem o mesmo padrão dos elos em \mathbb{L}^2 , mas claro, agora unindo os seus próprios vértices. De forma simplificada, o grafo $(\mathbb{L}^2)^*$ é obtido ao transladarmos o grafo \mathbb{L}^2 em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, e dizemos que $(\mathbb{L}^2)^*$ é o grafo dual de \mathbb{L}^2 . Ilustramos mais abaixo, na Figura 1.4, como se dispõem os grafos \mathbb{L}^2 e $(\mathbb{L}^2)^*$. Em linhas contínuas e vértices pretos, está representado o grafo \mathbb{L}^2 , cuja origem é indicada por 0. Seu dual, o grafo $(\mathbb{L}^2)^*$, está descrito em linhas tracejadas, vértices vazados e origem dada por 0^* , como segue:

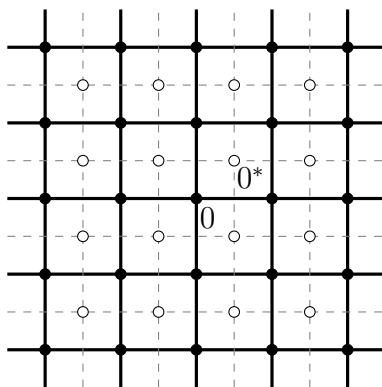


Figura 1.4: O grafo \mathbb{L}^2 , e seu dual, o grafo $(\mathbb{L}^2)^*$.

Observemos que existe uma relação biunívoca entre vértices e elos de \mathbb{L}^2 e $(\mathbb{L}^2)^*$. Seja a relação $e \rightarrow e^*$ que associa cada elo da rede original ao seu correspondente na rede dual, em que e^* é o único elo na rede dual que intersecta o elo e . A figura abaixo exemplifica esta relação:

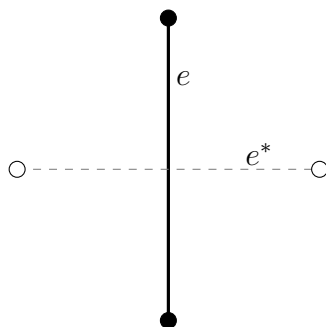


Figura 1.5: Elo e em \mathbb{L}^2 e seu correspondente e^* em $(\mathbb{L}^2)^*$.

Dadas as configurações de cada elo no grafo \mathbb{L}^2 , definimos o modelo de percolação induzido no grafo dual $(\mathbb{L}^2)^*$, declarando cada elo na rede dual como aberto se, e somente se, seu elo correspondente na rede original está aberto. Afirmamos que a existência de um cluster finito contendo a origem, na rede original, é condição necessária e suficiente para a existência de um circuito de elos fechados na rede dual ao redor da origem. Apesar de bastante intuitivo (podendo ser interpretado como uma versão discreta do Teorema da Curva de Jordan), este resultado não é de fácil demonstração, podendo esta ser encontrada em [Kesten(1982)], à página 386. A imagem abaixo ilustra um exemplo de cluster finito contendo a origem e cercado por um circuito fechado na rede dual:

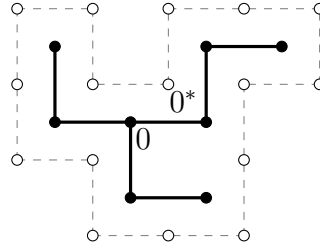


Figura 1.6: Circuito tracejado envolvendo cluster da origem.

Seja $A := \{\text{Há circuito de elos fechados na rede dual em torno da origem}\}$, e denotando sempre γ para circuitos na rede dual em torno da origem,

$$\mathbb{P}_p(|C| < \infty) = \mathbb{P}_p(A) \leq \sum_{\gamma} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ é fechado}), \quad (1.7)$$

em que a desigualdade é óbvia: se há pelo menos um circuito de elos fechados na rede dual em torno da origem, então há um circuito nestas condições. Particionando a última soma de (1.7) pela quantidade de elos (ou vértices, já que num circuito aparecem em quantidades iguais) de γ , obtemos

$$\mathbb{P}_p(|C| < \infty) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=n} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ é fechado}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) \cdot (1-p)^n, \quad (1.8)$$

em que $\lambda(n)$ denota a quantidade total de circuitos na rede dual ao redor da origem que possuem n elos. A igualdade segue da independência dos estados dos elos e da probabilidade de que um elo da rede dual esteja fechado ser $1-p$ (que é a probabilidade de um elo qualquer da rede original estar fechado). Encontraremos uma cota superior para $\lambda(n)$. Qualquer circuito com n elos na rede dual ao redor da origem deve cruzar um elo da rede original que une os vértices $(0, k)$ e $(0, k+1)$, para algum $k \in \mathbb{N}$ tal que $-\frac{n}{2} \leq k \leq \frac{n}{2}$ – caso contrário, seria violado o fato de o circuito possuir apenas n elos. A partir daí, como o circuito não repete elos, temos, a cada passo, no máximo 3 possibilidades de escolha para o elo seguinte do circuito. Logo, como o circuito tem n elos, em que o primeiro tem no máximo n possibilidades de escolha, e os restantes têm 3 possibilidades cada, temos que

$$\lambda(n) \leq n \cdot 3^{n-1}. \quad (1.9)$$

Por (1.8) e (1.9), temos que

$$\mathbb{P}(|C| < \infty) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (1-p)^n \cdot 3^{n-1} = (1-p) \sum_{n=1}^{\infty} n [3(1-p)]^{n-1},$$

em que a igualdade segue do fato de $1-p$ depender de n . Ademais, note que

$(1-p) \sum_{n=1}^{\infty} n[3(1-p)]^{n-1} < \infty$, para $3(1-p) < 1$. De fato, a finitude de $1-p$ e o fato de termos $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$, se $|\alpha| < 1$, implica na convergência da série se $3(1-p) < 1$, ou seja, se $p > \frac{2}{3}$. Neste caso, temos

$$(1-p) \sum_{n=1}^{\infty} n[3(1-p)]^{n-1} = (1-p) \frac{3(1-p)}{(1-3(1-p))^2} = \frac{3(1-p)^2}{(3p-2)^2},$$

ou seja, a série acima converge para uma função contínua em $p \in (\frac{2}{3}, 1]$, e que se anula em $p = 1$. Com isso, $\mathbb{P}_p(|C| < \infty) < 1$ para p suficientemente próximo de 1, ou seja, para p próximo o bastante de 1, tem-se $\theta(p) = \mathbb{P}_p(|C| = \infty) > 0$, isto é, $p_c(2) < 1$, provando o Lema 1.2, já que $\theta(p)$ é monótona em p . □

Pelos Lemas 1.1 e 1.2, segue, de imediato, o resultado do Teorema 1.1, como queríamos. □

O Teorema 1.1 pode ser reescrito de uma maneira mais simples:

Teorema 1.2. *Se $d \geq 2$, então $0 < p_c(d) < 1$.*

A seguir, provaremos o último resultado desta seção, que é consequência direta da Lei 0-1 de Kolmogorov, que será enunciada abaixo:

Teorema 1.3. *(Lei 0-1 de Kolmogorov) Sejam $\{\mathcal{G}_i : i \in \mathbb{N}\}$ σ -álgebras independentes definidas para um espaço Ω e uma medida de probabilidade \mathbb{P} . Definimos as seguintes σ -álgebras:*

$$\mathcal{H}_n = \bigcup_{i>n} \mathcal{G}_i \quad e \quad \mathcal{H}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n.$$

Então, para todo $H \in \mathcal{H}_\infty$, temos $\mathbb{P}(H) = 0$ ou $\mathbb{P}(H) = 1$.

A prova deste teorema pode ser encontrada em [Durrett], à página 61. Em palavras, a Lei 0-1 de Kolmogorov diz que eventos caudais têm sempre probabilidade 0 ou 1, em que eventos caudais são aqueles definidos por uma sucessão infinita de eventos independentes, mas que são independentes de qualquer subconjunto finito destes eventos.

Teorema 1.4. *A probabilidade $\psi(p)$ de existir um cluster aberto infinito satisfaz*

$$\psi(p) = \begin{cases} 0, & \text{se } \theta(p) = 0, \\ 1, & \text{se } \theta(p) > 0. \end{cases}$$

Este teorema é um pouco intrigante, já que nos diz que, independente de p , ou há cluster aberto infinito com probabilidade 1, ou não há cluster aberto infinito com probabilidade 1. Isto é, nunca haverá concomitantemente probabilidades positivas de haver um cluster aberto infinito e de não haver um cluster aberto infinito.

Demonstração. Notemos, primeiramente, que o evento $\{\mathbb{L}^d \text{ contém um cluster aberto infinito}\}$ é definido por uma sucessão infinita de eventos independentes, que são os estados dos elos do grafo. Ademais, a infinitude de um cluster independe de qualquer subconjunto finito de \mathbb{E}^d , já que a abertura ou fechamento de finitos elos não influencia na ocorrência ou não-ocorrência de um cluster aberto infinito. Portanto, temos que $\{\mathbb{L}^d \text{ contém um cluster aberto infinito}\}$ é um evento caudal. Então, pela Lei 0-1 de Kolmogorov, $\mathbb{P}_p(\mathbb{L}^d \text{ contém um cluster aberto infinito}) =: \psi(p)$ assume apenas os valores 0 ou 1.

Se $\theta(p) = 0$, então a probabilidade de haver um cluster aberto infinito contendo a origem é zero, quase-certamente. Logo, por invariância de translação no grafo, a probabilidade de haver um cluster aberto infinito contendo qualquer vértice do grafo também é zero quase-certamente. Daí, temos

$$\psi(p) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p(|C(x)| = \infty) = 0, \quad (1.10)$$

em que $C(x)$ é o cluster aberto contendo o vértice $x \in \mathbb{Z}^d$. A desigualdade em (1.10) segue do fato de que a ocorrência de um cluster aberto infinito não depende dos estados de todos os elos da rede. Como $\psi(p)$ é uma probabilidade, segue que $\psi(p) \geq 0$. Por (1.10), se $\theta(p) = 0$, segue que, de fato, $\psi(p) = 0$.

Se $\theta(p) > 0$, então

$$\psi(p) \geq \mathbb{P}_p(|C| = \infty) = \theta(p) > 0. \quad (1.11)$$

Em que a primeira desigualdade segue do fato de que se há cluster infinito contendo a origem, então há cluster infinito qualquer. A igualdade segue da definição de $\theta(p)$ e a segunda desigualdade advém da hipótese de que $\theta(p)$ é positiva. Aplicando a Lei 0-1 de Kolmogorov na desigualdade (1.11), exclui-se a possibilidade de ter $\psi(p) = 0$, o que prova que se $\theta(p) > 0$, então $\psi(p) = 1$, como queríamos. \square

Como consequência do Teorema 1.4, na fase subcrítica, o cluster aberto que contém qualquer vértice é finito quase-certamente. Além disso, depreende-se também que, na fase supercrítica, existe no mínimo um¹ cluster aberto infinito, quase-certamente.

¹Já foi provado que o cluster infinito é único, quase-certamente, na fase supercrítica. Isto será comentado mais adiante.

Observação 1.9. Note que o evento {Existe um cluster aberto infinito contendo a origem} não é caudal, já que depende, por exemplo, dos estados dos $2d$ (finitos) elos adjacentes à origem. Assim, a Lei 0-1 de Kolmogorov não pode ser aplicada à função $\theta(p)$, que trata exatamente da probabilidade de ocorrência do evento supracitado.

1.3 As Funções $\chi(p)$ e $\kappa(p)$ e Alguns Resultados Básicos

Esta seção será destinada a definir a função $\chi(p)$ e a função $\kappa(p)$, sendo esta última o objeto mais estudado neste trabalho. Em seguida, apresentaremos alguns resultados já conhecidos acerca da função $\kappa(p)$, assim como algumas questões que ainda permanecem em aberto.

A função $\chi(p)$, depois de $\theta(p)$, é a função mais importante em Percolação, e representa a esperança do tamanho (em número de vértices) do cluster da origem em função do parâmetro p . Matematicamente, escrevemos

$$\chi(p) := \mathbb{E}_p|C|.$$

Já usamos esta função, na demonstração do Lema 1.1, ainda sem ter feito qualquer menção à sua notação. Vimos, naquele momento, que

$$\mathbb{E}_p|C| = \infty \cdot \mathbb{P}_p(|C| = \infty) + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n) = \infty \cdot \theta(p) + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n),$$

das próprias definições de esperança e de $\theta(p)$. Agora, ao termos apresentado a definição de $\chi(p)$, podemos escrever

$$\chi(p) = \infty \cdot \mathbb{P}_p(|C| = \infty) + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n) = \infty \cdot \theta(p) + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n).$$

Como já comentamos, na seção anterior, $\mathbb{E}_p|C| = \infty$ se $\theta(p) > 0$. Assim, também podemos escrever

$$\chi(p) = \infty, \quad \text{se } p > p_c.$$

Desta forma, a função $\chi(p)$ só pode ser não-trivial para $p < p_c$, ou $p \leq p_c$ em dimensões entre três e dezoito.² É fácil notar que sempre vale a igualdade $\chi(0) = 1$ e, para grafos conexos infinitos, $\chi(1) = \infty$. De fato, quando $p = 0$, todos os elos do grafo estão fechados, implicando que o cluster que contém a origem somente a possui como vértice; quando $p = 1$ todos os elos do grafo são abertos, o que faz com

²Como ainda não se sabe se $\theta(p)$ é contínua no ponto crítico para $3 \leq d \leq 18$, não se pode concluir de imediato que $\chi(p_c) = \infty$ nestas dimensões.

que o cluster da origem seja infinito. Ademais, com um argumento de acoplamento não é difícil mostrar que $\chi(p)$ é não-decrescente em p , para $p < p_c$.

Observação 1.10. É também possível mostrar que se $p < p_c$, então $\chi(p) < \infty$. Uma prova para este fato não é trivial, e é consequência tanto do Teorema de Menshikov quanto de um resultado obtido por Aizenman e Barsky, que podem ser encontrados em [Grimmett], às páginas 88 e 105, respectivamente. Por fim, pontuamos que um importante resultado já conhecido é a analiticidade da função $\chi(p)$ na fase subcrítica.

Agora, definiremos a função $\kappa(p)$, que será nosso foco de estudo neste trabalho, ao demonstrarmos sua diferenciabilidade contínua no intervalo $[0, 1)$. Recordando o que foi comentado na Introdução, $\kappa(p)$ é a função que nos fornece a quantidade média de clusters abertos por vértice, isto é,

Definição 1.14. Considerando tacitamente que $\frac{1}{\infty} := 0$, definimos

$$\begin{aligned} \kappa(p) &:= \mathbb{E}_p(|C|^{-1}) = \mathbb{P}_p\left(\frac{1}{|C|} = 1\right) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}_p\left(\frac{1}{|C|} = \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \mathbb{P}_p\left(\frac{1}{|C|} = \frac{1}{3}\right) + \dots \\ &= \mathbb{P}_p(|C| = 1) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}_p(|C| = 2) + \frac{1}{3} \cdot \mathbb{P}_p(|C| = 3) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n), \end{aligned}$$

em que $|C|$ é a quantidade de vértices no cluster aberto que contém a origem.

A despeito de ser menos famosa que as funções $\theta(p)$ e $\chi(p)$, a função $\kappa(p)$ serviu de pilar para a primeira demonstração da unicidade quase-certa do cluster infinito, quando este existe, em [AKN]. É importante frisar que a prova de [AKN] abarca inclusive os casos de percolação de longo alcance, ou seja, modelos em que é permitida a ocorrência de elos abertos cujos vértices extremos não são vizinhos mais próximos.

Observação 1.11. Uma boa propriedade de $\kappa(p)$ é o fato de esta ser uma função limitada. De fato, $\kappa(p) \geq 0$, já que para todo n natural, $\frac{1}{n} > 0$ e $\mathbb{P}_p(|C| = n) \geq 0$. Desta maneira, temos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n) \geq 0$. Além disso,

$$\kappa(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_p(|C| = n) \leq 1,$$

evidenciando que $\kappa(p)$ é também limitada superiormente. A primeira desigualdade decorre do fato de que, para qualquer n natural, $\frac{1}{n} \leq 1$; a segunda desigualdade

vem do fato que $|C| \geq 1$, já que o cluster que contém a origem possui pelo menos um vértice (a própria origem), e o somatório ainda não contempla o caso em que o cluster da origem é infinito.

Observação 1.12. Para qualquer grafo, $\kappa(0) = 1$, já que o cluster que contém a origem somente conter-lhe-á. Se o grafo for infinito e conexo, $\kappa(1) = 0$, já que o cluster que contém a origem será infinito. É importante pontuar que $\kappa(p)$ é uma função não-crescente. Este fato será justificado na Observação 2.2.

Exemplo 1.1. Para nos familiarizarmos com a função $\kappa(p)$, iremos calcular a expressão de $\kappa(p)$, para todo $p \in [0, 1]$, em dimensão $d = 1$. Observe que em $\mathbb{L}^1 = (\mathbb{Z}, \mathbb{E}^1)$ qualquer cluster finito C , que contém a origem, é limitado por dois elos fechados. Cada elo possui probabilidade $1 - p$ de estar fechado, e p de estar fechado. Abaixo segue um exemplo de cluster com 5 vértices:

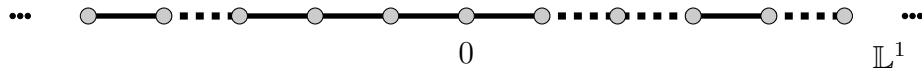


Figura 1.7: Um exemplo em que $|C| = 5$ em $\mathbb{L}^1 = (\mathbb{Z}, \mathbb{E}^1)$.

Além disso, para todo n natural, existem exatamente n possibilidades para a posição de um cluster de tamanho n que contenha a origem, quais sejam, as que, do sentido negativo ao positivo, começam nos vértices cujas coordenadas são $-n + 1, -n + 2, \dots, 0$, sendo este último sítio a própria origem. Ademais, observe que, em \mathbb{L}^1 , qualquer cluster com k vértices possui $k - 1$ elos. Portanto, pela independência dos estados de cada elo, temos que, em uma dimensão

$$\mathbb{P}_p(|C| = n) = n \cdot p^{n-1}(1 - p)^2.$$

Com isso, segue claramente que

$$\mathbb{P}\left(|C|^{-1} = \frac{1}{n}\right) = n \cdot p^{n-1}(1 - p)^2, \quad (1.12)$$

em que $n \in \mathbb{N}$. Daí, pela definição de $\kappa(p)$, temos que

$$\begin{aligned} \kappa(p) &= \mathbb{E}_p(|C|^{-1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \mathbb{P}_p\left(|C|^{-1} = \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot n \cdot p^{n-1}(1 - p)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1}(1 - p)^2 = (1 - p)^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} = (1 - p)^2 \cdot \frac{1}{1 - p} = 1 - p, \end{aligned}$$

para $p \in [0, 1)$. A segunda igualdade segue da definição de esperança. A terceira segue de (1.12), enquanto a quarta é direta. A quinta identidade segue do fato

de $(1 - p)^2$ independer de n , enquanto que a penúltima é decorrente do somatório ser série geométrica, que irá convergir para $(1 - p)^{-1}$, quando $p \in [0, 1)$. A última igualdade é óbvia. Pela Observação 1.12, sabemos que $\kappa(1) = 0$, já que $\mathbb{L}^1 = (\mathbb{Z}, \mathbb{E}^1)$ é infinito e conexo. Portanto, em uma dimensão, para todo $p \in [0, 1]$, tem-se que $\kappa(p) = 1 - p$. Em palavras, o inverso do tamanho médio do cluster que contém a origem depende linearmente de p . Abaixo, segue o gráfico de $\kappa(p)$, no caso unidimensional

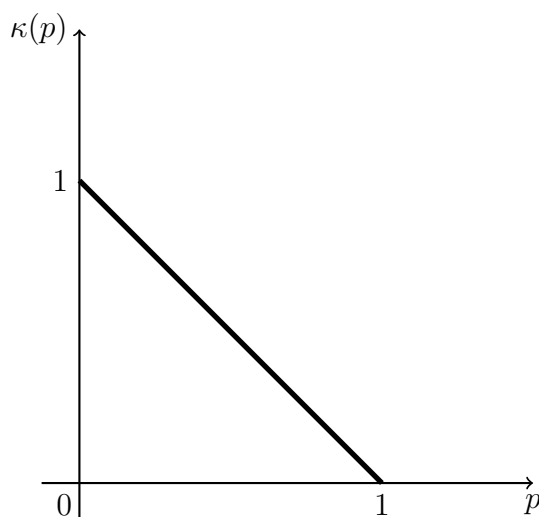


Figura 1.8: O gráfico de $\kappa(p)$ é linear em dimensão $d = 1$.

Observação 1.13. Para os grafos \mathbb{Z}^d , com $d \geq 2$, a dificuldade de obter expressão para $\kappa(p)$, caso seja possível conseguir analiticamente uma fórmula para tal, aumenta drasticamente. Para $d \geq 2$, não existe sequer uma cota exata para o número de clusters possíveis, em função da quantidade de vértices nestes.

Observação 1.14. Acerca da diferenciabilidade de $\kappa(p)$, alguns de seus fatos conhecidos e problemas em aberto foram inseridos no começo da Seção 3.3, onde nos dispusemos a tratar mais aprofundadamente deste tema.

1.4 Resultados Importantes em Percolação

Esta seção será devotada a uma breve apresentação de alguns resultados importantes e interessantes em Percolação. Serão abordados apenas resultados mais antigos, cujos enunciados podem ser compreendidos com o que foi exposto neste texto até então. Pensando apenas no caráter histórico, não objetivamos, aqui, demonstrar estes resultados.

Como vimos na Seção 1.2, $p_c(1) = 1$ e para todo $d \geq 2$, $0 < p_c(d) < 1$. [Kesten(1980)] provou que $p_c(2) = \frac{1}{2}$. No ano seguinte, [Wierman] demonstrou que

as redes triangular e hexagonal em duas dimensões possuem pontos críticos respectivamente iguais a $2 \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ e $1 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

Em 1982, [Kesten(1982)] prova que $p_c(3) < p_c(2)$, e logo em seguida, J. van der Berg e A. Frieze mostram que $p_c(d+1) < p_c(d)$, para todo $d \geq 1$. Já no final da década de 80, [Kesten(1990)] prova que $\lim_{d \rightarrow \infty} 2d \cdot p_c(d) = 1$, estabelecendo um valor assintótico para o ponto crítico de grafos hipercúbicos em dimensões altas.

Em 1987, [AKN] prova que na fase supercrítica, a probabilidade de haver exatamente um único cluster aberto infinito é igual a 1. Comentaremos um pouco mais deste resultado na Observação 3.8, citando que a prova em [AKN] usa o fato de $\kappa(p)$ ser continuamente diferenciável em $(0,1)$.

Nos dias atuais, o problema em aberto mais conhecido em Percolação é a continuidade ou descontinuidade de $\theta(p)$ em $3 \leq d \leq 18$ no ponto crítico. Sabe-se, contudo, que para $d = 2$ e $d \geq 19$, $\theta(p)$ é contínua, isto é, não há, quase-certamente, cluster aberto infinito para $p = p_c$ em dimensão 2 e superior a 19.

Capítulo 2

Ferramentas

2.1 Eventos Crescentes

Dedicaremos este capítulo a algumas ferramentas auxiliares, que são bastante utilizadas em Percolação. Para tanto, de início, introduziremos algumas definições, com alguns exemplos para ilustrar, para que possamos, em seguida, enunciar o resultado principal desta seção.

Definição 2.1. *Sejam $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ o conjunto de todas as possíveis configurações rede e \mathcal{F} a σ -álgebra gerada por todas estas configurações. Uma variável aleatória $X \in (\Omega, \mathcal{F})$ é dita crescente se, sempre que $\omega \leq \omega'$, então $X(\omega) \leq X(\omega')$, para $\omega, \omega' \in \mathbb{E}^d$ configurações quaisquer da rede. De forma análoga, se $-X$ é crescente, dizemos que X é decrescente.*

Como ilação natural da definição acima, definimos um evento crescente (e também decrescente):

Definição 2.2. *Sejam um evento $A \in \mathcal{F}$ e sua respectiva função indicadora*

$$\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dizemos que A é crescente se $\mathbb{1}_A(\omega) \leq \mathbb{1}_A(\omega')$ sempre que as configurações ω e ω' satisfazem $\omega \leq \omega'$. Com isso, se A é crescente, diz-se que seu complementar \bar{A} é decrescente.

Em palavras, dizemos que um evento A é crescente, sempre que, para qualquer configuração de elos abertos em que A ocorre, a abertura de mais elos continua garantindo a ocorrência de A .

Exemplo 2.1. Os eventos $A(x, y) := \{x \leftrightarrow y\}$, que indica a ocorrência de um caminho de elos abertos unindo x a y , e $\{|C| = \infty\}$, que indica a ocorrência de um cluster infinito contendo a origem, são ambos crescentes. Logo, os complementares desses eventos são decrescentes.

Exemplo 2.2. Além disso, as variáveis aleatórias $B(x, y) := |x \leftrightarrow y|$, que representa o número de caminhos distintos que unem x a y , e $|C|$, que informa o tamanho do cluster que contém a origem são também crescentes.

Observação 2.1. A variável aleatória $|C|^{-1}$ é claramente decrescente, já que $|C|$ é uma variável aleatória crescente, como vimos no exemplo acima.

Teorema 2.1. *Seja $\mathbb{E}_{p_i}(X)$ a esperança da variável aleatória X quando a probabilidade de cada elo estar aberto é p_i . Então, se X é crescente em (Ω, \mathcal{F}) e $p_1 \leq p_2$, tem-se*

$$\mathbb{E}_{p_1}(X) \leq \mathbb{E}_{p_2}(X), \quad (2.1)$$

quando as esperanças existem.

Seja $\mathbb{P}_{p_i}(A)$ a probabilidade de ocorrência do evento A , dado que cada elo tem probabilidade p_i de estar aberto. Se A é crescente em \mathcal{F} , e $p_1 \leq p_2$, então

$$\mathbb{P}_{p_1}(A) \leq \mathbb{P}_{p_2}(A). \quad (2.2)$$

Demonstração. Sejam $\{Y(e) \sim \text{U}[0, 1] : e \in \mathbb{E}^d\}$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Iremos novamente utilizar a técnica de acoplamento. Definamos

$$\eta_p(e) := \begin{cases} 1, & \text{se } Y(e) < p, \\ 0, & \text{se } Y(e) \geq p. \end{cases}$$

Daí, temos que se $p_1 \leq p_2$, então $\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}$, que nos fornece, pelo fato de X ser crescente, que $X(\eta_{p_1}) \leq X(\eta_{p_2})$. Ao tomarmos a esperança na desigualdade última, segue que $\mathbb{E}_{p_1}(X) \leq \mathbb{E}_{p_2}(X)$, mostrando (2.1).

Como um evento é crescente se, e somente se, sua função indicadora é crescente, ao tomarmos $X := \mathbb{1}_A$ em (2.1), obtemos

$$\mathbb{P}_{p_1}(A) = \mathbb{E}_{p_1}(X) \leq \mathbb{E}_{p_2}(X) = \mathbb{P}_{p_2}(A),$$

mostrando (2.2), como queríamos. □

Observação 2.2. Decorre da desigualdade (2.1) do Teorema 2.1, e do fato de que a variável aleatória $|C|^{-1}$ é decrescente, como foi ressaltado na Observação 2.1, que a função $\kappa(p)$ é não-crescente em p .

2.2 Desigualdade de FKG

Provaremos, agora, um teorema bastante intuitivo e útil acerca de eventos crescentes, e, mais geralmente, de variáveis aleatórias crescentes. Este resultado foi inicialmente provado por Harris, em 1960, mas apenas restrito à aplicação em Percolação. Ulteriormente, em 1971, Fortuin, Kasteleyn e Ginibre abrangeram-no para contextos mais gerais. Com isso, ficou o resultado conhecido como Desigualdade de FKG ou Desigualdade de Harris-FKG.

Teorema 2.2. *(Desigualdade de FKG)*

(a) *Se X e Y são variáveis aleatórias crescentes, $\mathbb{E}_p(X^2) < \infty$ e $\mathbb{E}_p(Y^2) < \infty$, então*

$$\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X) \cdot \mathbb{E}_p(Y). \quad (2.3)$$

(b) *Se A e B são eventos crescentes, então*

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A) \cdot \mathbb{P}_p(B). \quad (2.4)$$

O Teorema de FKG significa, em palavras, que variáveis aleatórias crescentes são positivamente correlacionadas, isto é, a ocorrência de um evento crescente aumenta a probabilidade de ocorrência de outro evento crescente. Pela definição de probabilidade condicional, temos mais cristalina esta ideia:

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A) \cdot \mathbb{P}_p(B) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}_p(A \cap B)}{\mathbb{P}_p(B)} \geq \mathbb{P}_p(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}_p(A|B) \geq \mathbb{P}_p(A).$$

Outrossim, o Teorema 2.2 admite uma versão similar para variáveis aleatórias e eventos decrescentes:

Proposição 2.1. *(Desigualdade de FKG para variáveis aleatórias decrescentes)*

(a) *Sejam X e Y são variáveis aleatórias decrescentes tais que $\mathbb{E}_p(X^2) < \infty$ e $\mathbb{E}_p(Y^2) < \infty$, então*

$$\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X) \cdot \mathbb{E}_p(Y).$$

(b) *Se A e B são eventos decrescentes, então*

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A) \cdot \mathbb{P}_p(B).$$

A prova da Proposição 2.1 segue os moldes da prova do Teorema de FKG, que faremos a seguir, notando que se X e Y são variáveis aleatórias decrescentes, então $-X$ e $-Y$ são variáveis aleatórias crescentes.

Demonstração da Desigualdade de FKG.

a) Iremos supor, a priori, que X e Y são variáveis aleatórias cilíndricas, isto é, dependem somente de um conjunto finito $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de elos. Sob essa hipótese, provaremos (2.3) por indução em n ; faremos, posteriormente, a prova para o caso infinito.

Para $n = 1$, temos que X e Y são funções que dependem apenas do estado $\omega(e_1)$ de e_1 , com $\mathbb{P}(\omega(e_1) = 1) = p$ e $\mathbb{P}(\omega(e_1) = 0) = 1 - p$. Observe que, para quaisquer ω_1 e ω_2 que tomam valores em $\{0, 1\}$, vale a desigualdade

$$(X(\omega_1) - X(\omega_2))(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \geq 0. \quad (2.5)$$

Se $\omega_1 = \omega_2$, segue que $(X(\omega_1) - X(\omega_2))(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) = 0$. Caso $\omega_1 \neq \omega_2$, por X e Y serem crescentes, então $(X(\omega_1) - X(\omega_2))$ e $(Y(\omega_1) - Y(\omega_2))$ nunca possuem sinais contrários, endossando a validade de (2.5). Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{\omega_1, \omega_2} (X(\omega_1) - X(\omega_2))(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) \\ &= \sum_{\omega_1, \omega_2} X(\omega_1) \cdot Y(\omega_1) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) \\ &\quad - \sum_{\omega_1, \omega_2} X(\omega_1) \cdot Y(\omega_2) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) \\ &\quad - \sum_{\omega_1, \omega_2} X(\omega_2) \cdot Y(\omega_1) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) \\ &\quad + \sum_{\omega_1, \omega_2} X(\omega_2) \cdot Y(\omega_2) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que a desigualdade segue de (2.5) associado ao fato de probabilidades nunca serem negativas. A igualdade segue da linearidade da soma. Prosseguindo os cálculos de (2.6), tem-se que

$$\begin{aligned} &\sum_{\omega_1, \omega_2} X(\omega_1) \cdot Y(\omega_1) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) \\ &= \sum_{\omega_2} \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) \cdot \left(\sum_{\omega_1} X(\omega_1) \cdot Y(\omega_1) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) \right) \\ &= \mathbb{E}_p(XY), \end{aligned} \quad (2.7)$$

assim como, de maneira inteiramente análoga,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\omega_1, \omega_2} X(\omega_2) \cdot Y(\omega_2) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) \\
&= \sum_{\omega_1} \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) \cdot \left(\sum_{\omega_2} X(\omega_2) \cdot Y(\omega_2) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) \right) \\
&= \mathbb{E}_p(XY),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

já que

$$\sum_{\omega_2} \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) = \sum_{\omega_1} \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) = 1,$$

pois cada soma contempla todos os possíveis valores de $\omega(e_1)$, que no caso são 0 e 1 apenas, e

$$\sum_{\omega_2} X(\omega_2) \cdot Y(\omega_2) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) = \sum_{\omega_1} X(\omega_1) \cdot Y(\omega_1) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) = \mathbb{E}_p(XY).$$

Ademais, sabemos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{\omega_1, \omega_2} X(\omega_1) \cdot Y(\omega_2) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) \\
&= \left(\sum_{\omega_1} X(\omega_1) \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) \right) \cdot \left(\sum_{\omega_2} Y(\omega_2) \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) \right) \\
&= \mathbb{E}_p(X) \mathbb{E}_p(Y),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

e, similarmente,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\omega_1, \omega_2} X(\omega_2) \cdot Y(\omega_1) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) \\
&= \left(\sum_{\omega_1} Y(\omega_1) \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) \right) \cdot \left(\sum_{\omega_2} X(\omega_2) \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) \right) \\
&= \mathbb{E}_p(X) \mathbb{E}_p(Y),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

já que, em ambos os casos, ω_1 e ω_2 são independentes, além de que as esperanças estão expressas explicitamente. Por (2.6)-(2.10), segue que

$$0 \leq 2 \left(\mathbb{E}_p(XY) - \mathbb{E}_p(X) \mathbb{E}_p(Y) \right),$$

implicando que, para $n = 1$, $\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X) \mathbb{E}_p(Y)$, como queríamos.

Suponhamos, para o passo de indução, que quando X e Y dependem de $n = k - 1$ estados de elos, então $\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X) \mathbb{E}_p(Y)$. Sejam X e Y funções

crescentes dos estados $\omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_k)$ dos elos respectivos e_1, e_2, \dots, e_k . Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p(XY) &= \mathbb{E}_p(\mathbb{E}_p(XY \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{k-1}))) \\ &\geq \mathbb{E}_p\left(\mathbb{E}_p\left(X \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{k-1})\right) \cdot \mathbb{E}_p\left(Y \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{k-1})\right)\right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

A igualdade segue da identidade $\mathbb{E}_p(\mathbb{E}_p(Z \mid \mathcal{F})) = \mathbb{E}_p(Z)$, em que Z é uma variável aleatória que toma valores nas configurações da rede, e \mathcal{F} pertence à σ -álgebra gerada pelo conjunto de todas as configurações da rede. Note que $\{\omega(e_1), \dots, \omega(e_{k-1})\} \in \mathcal{G}$, em que \mathcal{G} é a σ -álgebra gerada pelo conjunto das configurações em questão, possibilitando aplicar tal resultado, que pode ser encontrado em [Durrett], na página 224. A desigualdade de (2.11) segue de imediato da hipótese de indução, já que supusemos válida a desigualdade $\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y)$ para X e Y dependentes de apenas $k - 1$ elos. Além disso,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_p\left(\mathbb{E}_p\left(X \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{k-1})\right) \cdot \mathbb{E}_p\left(Y \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{k-1})\right)\right) \\ &\geq \mathbb{E}_p\left(\mathbb{E}_p\left(X \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{k-1})\right)\right) \cdot \mathbb{E}_p\left(\mathbb{E}_p\left(Y \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{k-1})\right)\right) \\ &= \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y), \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que a desigualdade é explicada pelo fato de tanto $\mathbb{E}_p(X \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{k-1}))$ quanto $\mathbb{E}_p(Y \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{k-1}))$ serem funções crescentes dependentes de somente $k - 1$ elos. Com isso, pode-se usar novamente a hipótese de indução. A igualdade é a mesma obtida na terceira passagem de (2.11).

Com isso, por (2.11) e (2.12), temos que

$$\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y)$$

é válida para os casos em que X e Y são cilíndricas.

Agora, provaremos (2.3) para o caso em que X e Y não são variáveis aleatórias cilíndricas e possuem o segundo momento finito, isto é, $\mathbb{E}_p(X^2) < \infty$ e $\mathbb{E}_p(Y^2) < \infty$. Seja e_1, e_2, \dots uma enumeração de elos de \mathbb{E}^d (como \mathbb{Z}^d é enumerável e cada vértice se avizinha com $2d$ elos, com d fixo, segue que \mathbb{E}^d é, de fato, um conjunto enumerável) e definamos

$$X_n := \mathbb{E}_p(X \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_n)) \quad \text{e} \quad Y_n := \mathbb{E}_p(Y \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_n)).$$

Pelo que foi discutido para o caso em que as variáveis aleatórias X e Y são cilíndricas, e notando que X_n e Y_n são ambas crescentes em função de e_1, \dots, e_n , então,

para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}_p(X_n Y_n) \geq \mathbb{E}_p(X_n) \mathbb{E}_p(Y_n). \quad (2.13)$$

Agora, definiremos submartingal, bem como um teorema conhecido no tema, que irá nos ajudar a completar esta parte da demonstração.

Definição 2.3. *A seqüência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é dita um submartingal se satisfaz*

(i) $\mathbb{E}|X_n| < \infty$;

(ii) $X_n \in \mathcal{F}_n$, em que \mathcal{F}_n é uma seqüência crescente de σ -álgebras;

(iii) $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq X_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Definamos $X_n^+ := \sup\{X_n, 0\}$.

Teorema 2.3. *(Teorema da Convergência de Martingais) Se X_n é um submartingal com $\sup_n \mathbb{E}X_n^+ < \infty$, então, quando $n \rightarrow \infty$, $X_n \rightarrow X$ quase-certamente, com $\mathbb{E}|X| < \infty$.*

Observação 2.3. Se no item (iii) da Definição 2.3 tivermos $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que X_n é um martingal. Observe que todo martingal é um submartingal.

Uma prova para o Teorema da Convergência de Martingais pode ser encontrada em [Durrett], na página 233. Como X e Y possuem segundo momento finito, então

$$\sup_n \mathbb{E}_p(\mathbb{E}_p(X | \omega(e_1), \dots, \omega(e_n))^+) < \infty$$

e

$$\sup_n \mathbb{E}_p(\mathbb{E}_p(Y | \omega(e_1), \dots, \omega(e_n))^+) < \infty.$$

Afirmção 2.1. *Sejam \mathcal{F} uma seqüência crescente σ -álgebras e $Z \in L^1$. Assim, sendo $Z_n := \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_n)$, temos que Z_n é um martingal com respeito à \mathcal{F} .*

De fato, temos

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = Z_n,$$

em que a primeira igualdade segue da definição de Z_n , e a segunda segue do seguinte resultado, que pode ser encontrado em [Durrett], na página 224:

Teorema 2.4. *Se $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, então*

(i) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_1) | \mathcal{F}_2) = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_1)$;

$$(ii) \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_2) \mid \mathcal{F}_1\right) = \mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_1).$$

Pela definição de X_n e Y_n , e por serem claramente integráveis, segue que estas variáveis aleatórias são submartingais. Desta forma, podemos usar o Teorema da Convergência de Martingais, que nos diz que, quando $n \rightarrow \infty$,

$$X_n \longrightarrow X \quad \text{e} \quad Y_n \longrightarrow Y \quad \mathbb{P}_p - q.c. \quad \text{e em } L^2(\mathbb{P}_p),$$

em que a convergência quase-certa implica a convergência em L^2 , pelo Teorema da Convergência Dominada, notando que X e Y possuem segundos momentos finitos, por hipótese. Logo, temos que, quando $n \rightarrow \infty$,

$$\mathbb{E}_p(X_n) \longrightarrow \mathbb{E}_p(X) \quad \text{e} \quad \mathbb{E}_p(Y_n) \longrightarrow \mathbb{E}_p(Y).$$

Pela desigualdade triangular e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos as respectivas desigualdades abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p|X_n Y_n - XY| &= \mathbb{E}_p|X_n Y_n - X Y_n + X Y_n - XY| \\ &\leq \mathbb{E}_p(|(X_n - X)Y_n| + |X(Y_n - Y)|) \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}_p((X_n - X)^2) \cdot \mathbb{E}_p(Y_n^2)} + \sqrt{\mathbb{E}_p((Y_n - Y)^2) \cdot \mathbb{E}_p(X^2)} \\ &\longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

já que $X_n \longrightarrow X$ em L^2 e $Y_n \longrightarrow Y$ em L^2 . Portanto, concluímos que $\mathbb{E}_p(X_n Y_n) \rightarrow \mathbb{E}_p(XY)$. Tomando o limite em (2.13) quando $n \rightarrow \infty$, segue que $\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y)$, como pretendíamos.

b) Supondo que A e B são eventos crescentes, nós definimos $X := \mathbb{1}_A$ e $Y := \mathbb{1}_B$, em que o símbolo $\mathbb{1}$ representa a função indicadora de um conjunto, que assume o valor 1 neste conjunto e 0 no seu complementar. Por X e Y só assumirem valores 0 ou 1, elas possuem segundo momento finito. Ademais, X e Y são crescentes, por A e B serem eventos crescentes. Logo, aplicando a parte a) em X e Y , temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y) &\Rightarrow \mathbb{E}_p(\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B) \geq \mathbb{E}_p(\mathbb{1}_A)\mathbb{E}_p(\mathbb{1}_B) \\ &\Rightarrow \mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A) \cdot \mathbb{P}_p(B), \end{aligned}$$

provando (2.4), e completando a demonstração do Teorema 2.2. \square

Vejamos, agora, um corolário bastante útil da Desigualdade de FKG:

Corolário 2.1. *Sejam A_1 e A_2 eventos crescentes, com $\mathbb{P}_p(A_1) = \mathbb{P}_p(A_2)$. Então,*

$$\mathbb{P}_p(A_1) \geq 1 - \sqrt{1 - \mathbb{P}_p(A_1 \cup A_2)}.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
 1 - \mathbb{P}_p(A_1 \cup A_2) &= 1 - \mathbb{P}_p(A_1) - \mathbb{P}_p(A_2) + \mathbb{P}_p(A_1 \cap A_2) \\
 &\geq 1 - 2\mathbb{P}_p(A_1) + \mathbb{P}_p(A_1) \cdot \mathbb{P}_p(A_2) \\
 &= 1 - 2\mathbb{P}_p(A_1) + [\mathbb{P}_p(A_1)]^2 = [1 - \mathbb{P}_p(A_1)]^2,
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

em que a primeira desigualdade é obtida pelo Princípio da Inclusão-Exclusão. A desigualdade segue do item b) da Desigualdade de FKG, já que A_1 e A_2 são eventos crescentes, por hipótese, além do fato de termos $\mathbb{P}_p(A_1) = \mathbb{P}_p(A_2)$. Fato este que explica a penúltima desigualdade, enquanto que a última é imediata. Passando a raiz quadrada em ambos os termos extremos de (2.14), temos o resultado desejado. \square

O Corolário 2.1 é bastante eficiente para determinarmos cotas inferiores para probabilidades de eventos crescentes, sendo, por exemplo, vital na construção de estimativas de percolação em retângulos, existência de circuitos de elos abertos, entre outras aplicações.

2.3 Desigualdade de BK

O próximo resultado, o único a ser apresentado nesta seção, pode ser entendido como uma versão contrária da Desigualdade de FKG, sendo esta última desigualdade mais abrangente, tendo em vista que o resultado a seguir está imbricado à Percolação e a Desigualdade de FKG pode ser aplicada em contextos mais gerais.

Definição 2.4. *Sejam dois eventos, A e B , crescentes à abertura de elos. Dizemos que A e B ocorrem disjuntamente para uma certa configuração ω de elos abertos em \mathbb{E}^d se a ocorrência simultânea de A e B não se condiciona ao estado de um mesmo elo. Em outras palavras, A e B ocorrem disjuntamente quando não existe um elo e tal que se mudamos o seu estado $\omega(e)$, a configuração deixa de satisfazer os eventos A e B simultaneamente. Denotamos este evento de ocorrência disjunta por $A \circ B$.*

Exemplo 2.3. *Um exemplo clássico ilustra a ideia de ocorrência disjunta: sejam a, b, c e d vértices distintos de \mathbb{E}^d , A o evento em que existe um caminho de elos abertos unindo a e b e B o evento em que existe um caminho de elos abertos unindo c e d . Assim, $A \circ B$ é o evento em que há dois caminhos de elos abertos, um unindo a e b e outro unindo c e d , com a condição de que estes caminhos não compartilham sequer um elo em comum.*

Definição 2.5. Sendo m um inteiro positivo, definimos \mathcal{G} como o conjunto de todos os subconjuntos de $\prod_{i=1}^m \{0, 1\}$.

Enunciemos, pois, o resultado central desta seção:

Teorema 2.5. (Desigualdade de BK) Se A e B são eventos crescentes em \mathcal{G} , então

$$\mathbb{P}_p(A \circ B) \leq \mathbb{P}_p(A) \cdot \mathbb{P}_p(B).$$

Batizou-se o Teorema 2.5 como Desigualdade de BK em homenagem aos seus autores, van den Berg e Kesten, que demonstram-na em 1985. Em palavras, a Desigualdade de BK nos fornece uma cota superior para a probabilidade de ocorrência disjunta de dois eventos crescentes cilíndricos.

Observação 2.4. Notando que a operação \circ é associativa e $A \circ B$ é crescente sempre que A e B são crescentes, pode-se deduzir, sem grandes dificuldades, uma versão mais geral de Desigualdade de BK: se A_1, A_2, \dots, A_k são eventos crescentes em \mathcal{G} , então

$$\mathbb{P}(A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_k) \leq \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i).$$

Observação 2.5. Kesten e van der Berg e conjecturaram a versão da Desigualdade de BK em que, independentemente de A e B serem crescentes ou não, a validade da desigualdade $\mathbb{P}_p(A \circ B) \leq \mathbb{P}_p(A) \cdot \mathbb{P}_p(B)$ continuaria mantida. Em 1997, Reimer provou afirmativamente a conjectura.

Descreveremos em resumo a prova da Desigualdade de BK seguindo os moldes da construção de [Fontes], contudo sem restringir que os eventos A e B representem necessariamente a ocorrência de um caminho de elos abertos entre vértices do grafo.

Resumo da demonstração da Desigualdade de BK.

Sejam G um subgrafo finito de $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, e $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ o conjunto de todos os seus m elos. Consideremos, também, que os eventos A e B são eventos crescentes de \mathcal{G} . Substituamos, agora, e_1 por dois elos paralelos: e'_1 e e''_1 , abertos com probabilidade p e fechados com probabilidade $1 - p$, independentes entre si. Assim, temos agora um novo grafo, que chamaremos G_1 . Por paralelos, entenda que e'_1 e e''_1 possuem os mesmos vértices como extremidade, isto é, o novo grafo passou a ser um multigrafo, já que agora se pode ter mais de um elo unindo dois vértices de G_1 . Esta construção está ilustrada abaixo:

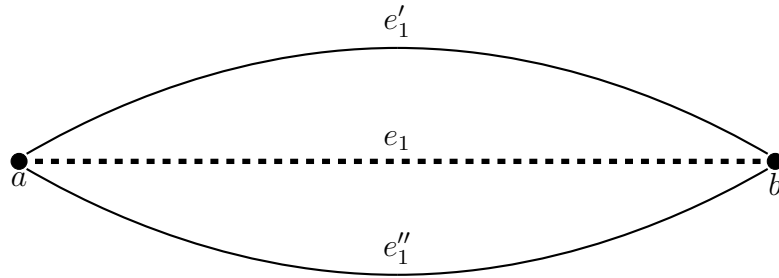


Figura 2.1: Elos e'_1 e e''_1 passam a substituir e_1 .

Denotemos por A_1 e B_1 as ocorrências dos eventos A e B no grafo G_1 . Impoñhamos, também, que a ocorrência de A_1 não faça uso do elo e''_1 , enquanto que a ocorrência de B_1 não faça uso do elo e'_1 . Observe que após esta operação, não diminui a probabilidade de ocorrência disjunta dos eventos, já que e_1 possui duas novas cópias, pelas quais podem nelas passar um caminho diferente em cada. Isto é,

$$\mathbb{P}(A \circ B) \leq \mathbb{P}(A_1 \circ B_1).$$

Continuando de forma indutiva, substituímos o elo e_2 de G_1 pelos elos paralelos e independentes e'_2 e e''_2 , formando o grafo G_2 . Denotemos, como de costume, por A_2 e B_2 as ocorrências dos eventos A e B no grafo G_2 , com a condição de que A_2 evite e''_2 e B_2 evite e'_2 . Nota-se, analogamente, que neste novo passo, a probabilidade de ocorrência de $A_2 \circ B_2$ não diminui em relação a $A_1 \circ B_1$, ou seja,

$$\mathbb{P}(A_1 \circ B_1) \leq \mathbb{P}(A_2 \circ B_2).$$

Esgotando as m substituições, com a mesma restrição de A_j evitar e''_j e B_j evitar e'_j , para $1 \leq j \leq m$, se mantêm as desigualdades $\mathbb{P}(A_{j-1} \circ B_{j-1}) \leq \mathbb{P}(A_j \circ B_j)$, e se obtém, por fim, duas cópias independentes do grafo G . Em uma cópia indagamos a ocorrência de A_m , e noutra, a ocorrência de B_m . Mas, observe que $A_m \circ B_m$ é o mesmo evento $A_m \cap B_m$, já que A_m e B_m seguem em G_m cópias disjuntas e idênticas ao grafo G . Como cada uma das cópias de G_m são independentes, temos que $\mathbb{P}(A_m \cap B_m) = \mathbb{P}(A_m) \cdot \mathbb{P}(B_m)$. Ademais, como cada cópia de G_m é idêntica ao grafo G , segue que $\mathbb{P}(A_m) = \mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B_m) = \mathbb{P}(B)$. Pela cadeia de desigualdades e igualdades acima, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \circ B) &\leq \mathbb{P}(A_1 \circ B_1) \leq \dots \leq \mathbb{P}(A_m \circ B_m) = \mathbb{P}(A_m \cap B_m) \\ &= \mathbb{P}(A_m) \cdot \mathbb{P}(B_m) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B). \end{aligned}$$

□

Observação 2.6. Para evitar uma prova longa e demasiado técnica de um resul-

tado que não é o principal objetivo deste trabalho, alguns detalhes foram omitidos, como por exemplo, definir, para cada novo grafo, o novo espaço de probabilidades. Objetivamos, nesta prova, explorar mais a noção visual e intuitiva do processo. Para uma demonstração mais rigorosa e detalhada da Desigualdade de BK, recomendamos [Grimmett], na página 39.

2.4 Fórmula de Russo

Iremos agora, exibir e demonstrar um resultado bastante importante em Percolação: a Fórmula de Russo. Este teorema nos fornece uma cota exata para a derivada em p da probabilidade de ocorrência de um evento crescente A que depende de finitos elos da rede. O resultado foi provado por Russo em 1981, e, à primeira vista, instiga de forma surpreendente a intuição, se tornando bastante razoável à medida que vai sendo provado. Antes de enunciá-lo, iremos, pois, fazer algumas definições necessárias para sua compreensão.

Definição 2.6. *Seja A um evento qualquer, que depende dos estados dos elos da rede. Escrevemos, então $\mathbb{P}_p(A)$ para a probabilidade de ocorrência de A , dado que a probabilidade de cada elo estar aberto é p , de forma independente entre si.*

Definição 2.7. *Sejam A um evento como na definição acima, e ω uma configuração da rede. Dizemos que o elo e da rede é pivotal para (A, ω) se $\mathbb{1}_A(\omega) \neq \mathbb{1}_A(\omega')$, em que ω' é a configuração que difere da configuração ω em somente um elo: o elo e . Em outras palavras, e é pivotal para (A, ω) se a ocorrência (ou não-ocorrência) de A se altera, caso mudemos o estado do elo e . Iremos, por vezes, apenas mencionar que um elo é pivotal para o evento, deixando implícito o fato de que ser pivotal depende também da configuração.*

Como nosso foco está em eventos crescentes, então e é pivotal para (A, ω) se, somente se, A ocorre quando e está aberto e A não ocorre quando e está fechado.

Exemplo 2.4. Vejamos dois exemplos em que um certo elo e é pivotal para (A, ω) , em que A é um evento crescente à abertura de elos:

- (i) Sejam A o evento em que há um cluster infinito contendo a origem e ω uma configuração em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Obviamente, A é crescente à abertura de elos. Dizemos que um elo e é pivotal para (A, ω) se: e está fechado para ω , e não existe cluster infinito contendo a origem, mas ao abrirmos somente o elo e , tal cluster passa a existir; ou e está aberto para ω , e há o cluster infinito que contém a origem, contudo ao fecharmos apenas o elo e , tal cluster infinito deixa de existir.

- (ii) Sejam A o evento em que há um caminho de elos abertos unindo a origem à fronteira da caixa $B(3)$, em \mathbb{L}^2 , e ω uma configuração em $\{0, 1\}^{84}$, em que ordenamos, a priori, os 84 elos da caixa. Dizemos que o elo e é pivotal para (A, ω) se, caso exista tal caminho em ω e e é aberto, este caminho deixará de existir ao fecharmos o elo e ; ou caso não exista o caminho e e fechado, então, ao abrirmos e , tal caminho é concebido. Abaixo, ilustramos este exemplo para uma certa configuração $\omega_1 \in \{0, 1\}^{84}$:

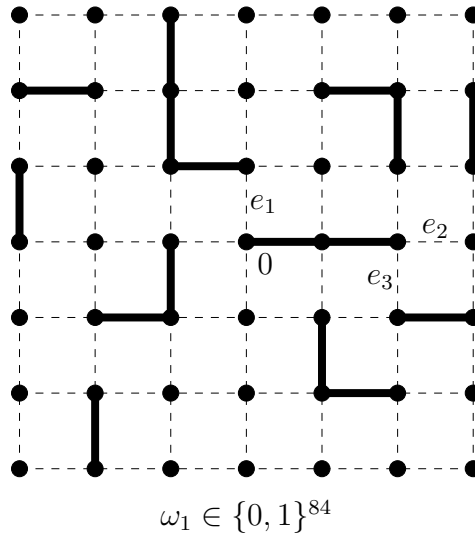


Figura 2.2: Os elos fechados e_1, e_2 e e_3 são os únicos pivotais para (A, ω_1) .

Note que a configuração ω_1 , da Figura 2.2, não possui caminho de elos abertos unindo a origem, representada por 0, à fronteira da caixa $B(3)$. Os elos fechados e_1, e_2 e e_3 são os únicos elos pivotais para (A, ω_1) , já que somente eles podem realizar tal caminho ao se tornarem abertos, não concomitantemente.

Teorema 2.6. (*Fórmula de Russo*) Seja A um evento crescente, definido em termos dos estados de finitos elos de \mathbb{E}^d . Então,

$$\frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A) = \mathbb{E}_p(N(A)),$$

em que $N(A)$ é o número de elos que são pivotais para A .

Observação 2.7. Para a Fórmula de Russo, podemos escrever, alternativamente,

$$\frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A) = \sum_{e \in \mathbb{E}^d} \mathbb{P}_p(e \text{ é pivotal para } A),$$

em que $\mathbb{P}_p(e \text{ é pivotal para } A)$ indica a probabilidade de o elo e ser pivotal para o evento crescente A , tomada no conjunto de todas as possíveis configurações da rede.

De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in \mathbb{E}^d} \mathbb{P}_p(e \text{ é pivotal para } A) &= \sum_{e \in \mathbb{E}^d} \mathbb{E}_p \left[\mathbb{1}_{(e \text{ é pivotal para } A)} \right] \\
&= \mathbb{E}_p \left[\sum_{e \in \mathbb{E}^d} \mathbb{1}_{(e \text{ é pivotal para } A)} \right] \\
&= \mathbb{E}_p(N(A)).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

A probabilidade é a esperança da indicadora, resultando na primeira igualdade. A segunda igualdade segue do Teorema de Tonelli-Fubini e a terceira da definição de $N(A)$.

Demonstração da Fórmula de Russo.

Primeiramente, deve-se justificar a existência de $\frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A)$, para todo $p \in [0, 1]$. De fato, por A ser um evento que depende de apenas finitos elos, $\mathbb{P}_p(A)$ é um polinômio finito em p , logo derivável; assim não devemos nos preocupar com este possível contratempo. Seguiremos a demonstração dada em [Fontes], com o preenchimento de algumas justificativas adicionais entre os argumentos dados. Para uma elucubração mais completa concernente a este resultado, recomenda-se [Grimmett], às páginas 41 a 45. Usaremos, pois, um argumento de acoplamento para reconstruir um modelo de percolação idêntico ao tradicional, mas agora havendo apenas um único "sorteio", em vez de sortearmos o estado de cada elo: seja $\mathcal{Z} := \{Z_e; e \in \mathbb{E}^d\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição $Z_e \sim U[0, 1]$, para todo $e \in \mathbb{E}^d$. Para haver distinção, \mathbb{P}' denotará probabilidade neste modelo. Um elo e da rede é dito p -aberto se $Z_e < p$ e p -fechado se $Z_e \geq p$, como já definimos anteriormente.

Construímos, deste modo, um modelo acoplado de percolação com parâmetro p usando elos p -abertos e p -fechados. Note, que como cada $Z_e \sim U[0, 1]$, cada elo está aberto com probabilidade p , como antes. A independência entre os estados de cada elo também não foi perdida nesta construção, já que as variáveis aleatórias Z_e são, por definição, independentes. Neste modelo, cada elo assume um valor, e ao sortearmos p de maneira uniforme em $[0, 1]$, temos posse do estado de todos os elos da rede.

Consideremos, para uma certa configuração de variáveis em \mathcal{Z} , a configuração de elos p -abertos ω_p , ou seja, $(\omega_p(e))_{e \in \mathbb{Z}^d}$, com

$$\omega_p(e) = \begin{cases} 1, & \text{se } Z_e < p, \\ 0, & \text{se } Z_e \geq p, \end{cases}$$

para todo $e \in \mathbb{E}^d$.

Seja A um evento crescente e cilíndrico, que depende apenas do conjunto finito G de elos de \mathbb{E}^d . Sabemos, pelas próprias definições que fizemos, que

$$\mathbb{P}_{p+\delta}(A) - \mathbb{P}_p(A) = \mathbb{P}'(\omega_p \notin A; \omega_{p+\delta} \in A), \quad (2.16)$$

em que ambos os membros denotam a probabilidade de ocorrência do evento A em $p + \delta$, e da não-ocorrência em p .

Se A é crescente, $\omega_p \notin A$ e $\omega_{p+\delta} \in A$, então há elos e_j tais que $\omega_p(e_j) = 0$ e $\omega_{p+\delta}(e_j) = 1$, isto é, $p \leq Z_{e_j} < p + \delta$. Denote por $\mathcal{N}_{p,\delta}$ o conjunto de tais elos.

Afirmção 2.2. Quando $\delta \rightarrow 0^+$, temos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot \mathbb{P}'(|\mathcal{N}_{p,\delta}| \geq 2) = 0.$$

De fato, seja k a quantidade de elos de G , isto é, a quantidade de elos na qual A depende. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot \mathbb{P}'(|\mathcal{N}_{p,\delta}| \geq 2) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot [1 - \mathbb{P}'(|\mathcal{N}_{p,\delta}| = 1) - \mathbb{P}'(|\mathcal{N}_{p,\delta}| = 0)] \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot \left[1 - \binom{k}{1} \cdot \delta(1 - \delta)^{k-1} - (1 - \delta)^k \right] \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot [1 - (1 - \delta)^{k-1}(1 + (k - 1)\delta)] \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (k - 1) \cdot (1 - \delta)^{k-2} \cdot (1 + \delta(k - 1)) - (1 - \delta)^{k-1} \cdot (k - 1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

em que a primeira igualdade advém do fato de que o complementar de haver mais que dois elos em $\mathcal{N}_{p,\delta}$ é haver um ou nenhum elo neste conjunto. A segunda igualdade segue do fato de que cada um dos k elos possui probabilidade δ de pertencer a $\mathcal{N}_{p,\delta}$ e $1 - \delta$ de não pertencer, sempre de forma independente. A terceira igualdade é direta, enquanto que a quarta é fruto da regra de L'Hospital. O resultado do limite é direto, provando a Afirmção 2.2.

Consideremos $\omega_p \notin A, \omega_{p+\delta} \in A, |\mathcal{N}_{p,\delta}| = 1$ e $p \leq Z_e < p + \delta$. Dizemos, que um elo e é essencial em ω_p para a ocorrência (ou não) de A quando $\omega_p \in A$ e $\omega'_p \notin A$, ou quando $\omega_p \notin A$ e $\omega'_p \in A$, em que ω'_p e ω_p são configurações que diferem somente no elo e . Note que um elo é essencial se, e somente se, ele é pivotal, na configuração acoplada correspondente. Este fato segue de ambas possuírem mesmas definições e o acoplamento inalterar a configuração dos estados dos elos. Sabemos que

$$\mathbb{P}'(\omega_p \notin A, \omega_{p+\delta} \in A, |\mathcal{N}_{p,\delta}| = 1) = \sum_{e \in G} \mathbb{P}'(\omega_p \notin A, \omega_{p+\delta} \in A, \mathcal{N}_{p,\delta} = \{e\}), \quad (2.17)$$

já que, havendo um único elo em $\mathcal{N}_{p,\delta}$, ele deve estar em G , e a soma disjunta da direita indica exatamente a probabilidade de haver um único elemento em $\mathcal{N}_{p,\delta}$. Ademais, os eventos $(\omega_p \notin A, \omega_{p+\delta} \in A, \mathcal{N}_{p,\delta} = \{e\})$ e $(e \text{ é essencial em } \omega_p \text{ para } A, p \leq Z_e < p + \delta, \mathcal{N}_{p,\delta} = \{e\})$ são os mesmos, pela própria definição de elo essencial. Logo, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}'(\omega_p \notin A, \omega_{p+\delta} \in A, \mathcal{N}_{p,\delta} = \{e\}) &= \mathbb{P}'(e \text{ é essencial em } \omega_p \text{ para } A, p \leq Z_e < p + \delta) \\ &\quad - \mathbb{P}'(e \text{ é essencial em } \omega_p \text{ para } A, p \leq Z_e < p + \delta, \mathcal{N}_{p,\delta} \neq \{e\}). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Observando com cuidado, se percebe que o fato de um elo e ser essencial em ω_p para A depende do estado de todos os outros elos, mas não do seu estado. Assim, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot [\mathbb{P}_{p+\delta}(A) - \mathbb{P}_p(A)] &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot \mathbb{P}'(\omega_p \notin A, \omega_{p+\delta} \in A, |\mathcal{N}_{p,\delta}| = 1) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot \sum_{e \in G} \mathbb{P}'(\omega_p \notin A, \omega_{p+\delta} \in A, \mathcal{N}_{p,\delta} = \{e\}) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot \sum_{e \in G} \mathbb{P}'(e \text{ é essencial em } \omega_p \text{ para } A, p \leq Z_e < p + \delta) \\ &\quad - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot \sum_{e \in G} \mathbb{P}'(e \text{ é essencial em } \omega_p \text{ para } A, p \leq Z_e < p + \delta, \mathcal{N}_{p,\delta} \neq \{e\}) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot \sum_{e \in G} \mathbb{P}'(e \text{ é essencial em } \omega_p \text{ para } A, p \leq Z_e < p + \delta), \end{aligned} \tag{2.19}$$

em que a primeira igualdade segue de (2.16) e da Afirmação 2.2, notando que se $|\mathcal{N}_{p,\delta}| = 0$, não é possível que a configuração passe a pertencer a A quando acrescentamos δ à probabilidade de cada elo estar aberto. A segunda igualdade é imediata de (2.17), enquanto que a terceira é fruto de (2.18). A última identidade, por sua vez, segue da Afirmação 2.2, notando que se $\mathcal{N}_{p,\delta} \neq \{e\}$ e existe elo essencial em ω_p para A , então há ao menos dois elos em $\mathcal{N}_{p,\delta}$, recaindo no caso visto na afirmação citada acima.

Recordando que o fato de um elo ser essencial independe de seu estado, desmembramos o termo do último somatório de (2.19), obtendo a primeira igualdade

de

$$\begin{aligned}
& \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot [P_{p+\delta}(A) - \mathbb{P}_p(A)] \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot \sum_{e \in G} \mathbb{P}'(e \text{ é essencial em } \omega_p \text{ para } A) \cdot \mathbb{P}'(p \leq Z_e < p + \delta) \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot \sum_{e \in G} \mathbb{P}'(e \text{ é essencial em } \omega_p \text{ para } A) \cdot \delta \\
&= \sum_{e \in G} \mathbb{P}'(e \text{ é essencial em } \omega_p \text{ para } A) \\
&= \mathbb{E}'(M(A)),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

onde $M(A)$ representa a quantidade de elos essenciais em ω_p para A e \mathbb{E}' é a esperança com respeito a \mathbb{P}' . A segunda igualdade segue do fato de Z_e ser escolhida em $[0, 1]$ de maneira uniforme, e a segunda advém do fato de o somatório não depender de δ . A última igualdade é similar à igualdade explicada em (2.15), associada à definição de $M(A)$. Como argumentamos anteriormente, um elo e é pivotal para (A, ω) se, e somente se, for essencial em ω_p para A . Daí, concluímos, de (2.20), que

$$\frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot [P_{p+\delta}(A) - \mathbb{P}_p(A)] = \mathbb{E}'(M(A)) = \mathbb{E}(N(A)),$$

findando a prova do teorema. □

A Fórmula de Russo ajuda a erguer um resultado bastante útil em Percolação, que nos fornece o valor da probabilidade de um certo evento crescente e cilíndrico acontecer. Este resultado é útil para demonstrar o Teorema de Menshikov, um famoso resultado em Percolação. Enunciemo-lo, então:

Proposição 2.2. *Seja A um evento crescente, e que depende de finitos elos de \mathbb{L}^d . Então,*

$$\mathbb{P}_{p_2}(A) = \mathbb{P}_{p_1}(A) \cdot \exp \left(\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} \cdot \mathbb{E}_p(N(A) | A) dp \right),$$

em que $0 < p_1 \leq p_2 \leq 1$.

Demonstração. Vimos, na demonstração da Fórmula de Russo, que o estado de cada elo independe do fato de este ser pivotal (ou essencial). Assim, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(e \text{ é pivotal para } A) &= \frac{\mathbb{P}_p(e \text{ é pivotal para } A) \cdot \mathbb{P}_p(e \text{ está aberto})}{\mathbb{P}_p(e \text{ está aberto})} \\
&= \frac{1}{p} \cdot \mathbb{P}_p(e \text{ está aberto e é pivotal para } A),
\end{aligned} \tag{2.21}$$

em que a primeira igualdade é óbvia, ao atentarmos que $p \neq 0$, por hipótese, implicando que e tem probabilidade não-nula de estar aberto. A segunda igualdade

segue da independência que citamos e do fato de que a probabilidade em p de um certo elo estar aberto é exatamente p . Pela Observação 2.7, temos a primeira igualdade de

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A) &= \sum_{e \in \mathbb{E}^d} \mathbb{P}_p(e \text{ é pivotal para } A) \\
&= \sum_{e \in \mathbb{E}^d} \frac{1}{p} \cdot \mathbb{P}_p(e \text{ está aberto e é pivotal para } A) \\
&= \frac{1}{p} \cdot \sum_{e \in \mathbb{E}^d} \mathbb{P}_p(A \cap \{e \text{ é pivotal para } A\}) \\
&= \frac{1}{p} \cdot \sum_{e \in \mathbb{E}^d} \mathbb{P}_p(A) \cdot \mathbb{P}_p(e \text{ é pivotal para } A \mid A) \\
&= \frac{1}{p} \cdot \mathbb{E}_p(N(A) \mid A) \cdot \mathbb{P}_p(A).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

A segunda igualdade segue de (2.21), enquanto que a terceira igualdade é o resultado de A acontecer se, e somente se, e estiver aberto, em que e é pivotal para A . A penúltima igualdade segue da definição de probabilidade condicional, enquanto que a última é conseguida por argumento análogo ao que foi feito em (2.15). Integrando os membros extremos de (2.22), com respeito a p , no intervalo $[p_1, p_2]$, obtemos

$$\log \mathbb{P}_{p_2}(A) - \log \mathbb{P}_{p_1}(A) = \log \left(\frac{\mathbb{P}_{p_2}(A)}{\mathbb{P}_{p_1}(A)} \right) = \left(\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} \cdot \mathbb{E}_p(N(A) \mid A) dp \right). \tag{2.23}$$

Calculando a exponencial dos dois últimos membros de (2.23), segue que

$$\mathbb{P}_{p_2}(A) = \mathbb{P}_{p_1}(A) \cdot \exp \left(\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} \cdot \mathbb{E}_p(N(A) \mid A) dp \right),$$

como pretendido. □

2.5 Teorema Ergódico

Nesta seção, enunciaremos um teorema ergódico, que nos servirá como ferramenta na prova do primeiro resultado do Capítulo 3, o Teorema 3.1, que nos fornece uma relação entre $\kappa(p)$ certas médias espaciais. Uma demonstração para este teorema ergódico pode ser encontrada em [DS], na página 679.

Teorema 2.7. *Sejam T_i , com $i = 1, \dots, k$, operadores lineares em L^1 com $|T_i|_\infty \leq 1$ e $|T_i|_1 \leq 1$, para $i = 1, \dots, k$, e seja S um conjunto de pontos de um espaço. Então,*

para toda $f \in L^p$, com $p > 1$, a sequência múltipla

$$(n_1 \dots n_k)^{-1} \sum_{m_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{m_k=0}^{n_k-1} (T_k^{m_k} \dots T_1^{m_1} f)(s)$$

é convergente (quando $n_1, \dots, n_k \rightarrow \infty$ independentemente) em quase todo ponto $s \in S$, assim como na norma L^p . Além disso, esta sequência múltipla é dominada por uma função em L^p .

Observação 2.8. Em nossa aplicação probabilística tomaremos S como o conjunto das configurações no grafo, e cada ponto $s \in S$ representando uma possível configuração.

Capítulo 3

Diferenciabilidade de $\kappa(p)$

3.1 Preliminares

O presente capítulo será dedicado à demonstração da diferenciabilidade (e, mais geralmente, à da diferenciabilidade contínua) de $\kappa(p)$ no intervalo $[0, 1)$ em \mathbb{Z}^d . Para tanto, faremos algumas definições e apresentaremos alguns resultados iniciais.

Definição 3.1. *Sendo $B(n)$ a caixa centrada na origem, de lado $2n$, como visto na Definição 1.11, denotamos por K_n a quantidade de clusters abertos em $B(n)$.*

Mostraremos, no teorema a seguir, que K_n é aproximadamente uma função linear de $|B(n)|$, isto significa, a razão $\frac{K_n}{|B(n)|}$ converge quase-certamente e em L^1 a $\kappa(p)$, quando $n \rightarrow \infty$.

Intuitivamente, tal fato aparenta ser verdadeiro, já que $\frac{K_n}{|B(n)|}$ indica claramente a quantidade de clusters por vértice em $B(n)$ e $\kappa(p)$ indica esta mesma relação, porém em todo o grafo \mathbb{L}^d .

Teorema 3.1. *Para $0 \leq p \leq 1$, temos que*

$$\frac{K_n}{|B(n)|} \rightarrow \kappa(p) \quad \mathbb{P}_p - q.c. \text{ e em } L^1(\mathbb{P}_p),$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Definamos, para qualquer vértice $x \in B(n)$ ¹, $C_n(x)$ como o cluster aberto de $B(n)$ que contém x . Como de costume, escrevemos $|C_n(x)|$ para o número de vértices de $C_n(x)$. Analogamente, definimos $C(x)$ para o cluster em \mathbb{L}^d que contém x e $|C(x)|$ para sua quantidade de vértices.

¹Aqui, cometemos um abuso de notação, visto que consideramos, de início, $B(n)$ como um grafo, e queremos nos referir, neste caso, ao conjunto dos vértices deste mesmo grafo.

Para cada $x \in \mathbb{Z}^d$, vamos definir a seguinte função:

$$\Gamma(x) := \begin{cases} |C(x)|^{-1}, & \text{se } |C(x)| < \infty, \\ 0, & \text{se } |C(x)| = \infty. \end{cases}$$

Estendendo a definição, para $x \in B(n)$, definimos $\Gamma_n(x) := |C_n(x)|^{-1}$. Logo, para todo $x \in B(n)$,

$$\Gamma(x) = \frac{1}{|C(x)|} \leq \frac{1}{|C_n(x)|} = \Gamma_n(x). \quad (3.1)$$

As duas igualdades advêm das definições de $\Gamma(x)$ e $\Gamma_n(x)$ que foram feitas acima. A desigualdade é fruto de $|C_n(x)| \leq |C_{n+1}(x)| \leq \dots \leq |C(x)|$, já que quando n cresce, acrescentamos mais vértices e elos ao grafo, o que faz com que o cluster que contém x nunca diminua o volume. Se $|C(x)| = \infty$, a desigualdade é imediata, pois

$$\frac{1}{|C_n(x)|} \geq \frac{1}{(2n+1)^d} > 0 = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{|C(x)|},$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Pela definição de $\Gamma_n(x)$, cada vértice x de cada cluster C_j de $B(n)$ é tal que $\Gamma_n(x) = \frac{1}{|C_j|}$. Logo,

$$\sum_{x \in B(n)} \Gamma_n(x) = \sum_{j=1}^{K_n} \sum_{x \in C_j} \Gamma_n(x) = \sum_{j=1}^{K_n} \sum_{x \in C_j} \frac{1}{|C_j|} = \sum_{j=1}^{K_n} |C_j| \cdot \frac{1}{|C_j|} = \sum_{j=1}^{K_n} 1 = K_n, \quad (3.2)$$

em que na primeira igualdade, apenas particionamos o conjunto de vértices de acordo com o cluster (são K_n clusters, como definimos) o qual ele pertence, e na segunda igualdade, somente substituímos o valor de $\Gamma_n(x)$. A terceira igualdade decorre do fato que, para qualquer C_j , existem $|C_j|$ somandos no segundo somatório, e as demais desigualdades são imediatas.

Assim, temos

$$\frac{K_n}{|B(n)|} = \frac{1}{|B(n)|} \cdot \sum_{x \in B(n)} \Gamma_n(x) \geq \frac{1}{|B(n)|} \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x), \quad (3.3)$$

em que a igualdade é resultado da equação (3.2) e a desigualdade segue de (3.1), notando que se para qualquer $x \in B(n)$, $\Gamma_n(x) \geq \Gamma(x)$, mantendo a desigualdade para a soma finita destes termos.

Como $0 \leq \Gamma(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, temos que $\{\Gamma(x) : x \in \mathbb{Z}^d\}$ é uma coleção de funções limitadas, logo L^1 , de elos com estados independentes. Ademais, esta coleção é estacionária por translação de \mathbb{L}^d . Daí, segue do Teorema Ergódico 2.7, apresentado no capítulo anterior, que tomando os $2d$ operadores lineares como translações para cada sentido da rede, sabe-se que estes operadores têm norma

1 em L^1 e L^∞ , já que qualquer translação preserva integrais. Como comentamos na Observação 2.8, nosso conjunto S será o conjunto das configurações possíveis. Além disso, a função f é representada pela função Γ , que está claramente em L^p , para todo $p > 1$, já que Γ é, por definição, uma função limitada, como comentamos acima. Por fim, garante-se, pelo Teorema Ergódico, que há uma convergência quase-certa de $\frac{1}{|B(n)|} \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x)$ a uma certa função, que será, neste caso, $\mathbb{E}_p(\Gamma(0))$ já que estamos aumentando a caixa, e cada vértice pode ser obtido por $2d$ associações de translações da origem. Daí,

$$\frac{1}{|B(n)|} \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) \longrightarrow \mathbb{E}_p(\Gamma(0)) \quad \mathbb{P}_p - \text{q.c.}, \quad (3.4)$$

quando $n \rightarrow \infty$, em que 0 indica a origem.

Por (3.3), segue que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{K_n}{|B(n)|} \geq \mathbb{E}_p(\Gamma(0)) = \mathbb{E}_p(|C|^{-1}) =: \kappa(p) \quad \mathbb{P}_p - \text{q.c.}, \quad (3.5)$$

em que a primeira igualdade advém da definição de $\Gamma(x)$.

Utilizando a linearidade da soma, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{x \in B(n)} \Gamma_n(x) &= \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) + \sum_{x \in B(n)} \Gamma_n(x) - \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) \\ &= \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) + \sum_{x \in B(n)} (\Gamma_n(x) - \Gamma(x)). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Olhando a expressão $\sum_{x \in B(n)} (\Gamma_n(x) - \Gamma(x))$, ao particionarmos seus vértices naqueles que possuem e os que não possuem um caminho de elos abertos unindo-o à fronteira de $B(n)$, obtemos

$$\sum_{x \in B(n)} \Gamma_n(x) = \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) + \sum_{x: x \leftrightarrow \partial B(n)} (\Gamma_n(x) - \Gamma(x)) + \sum_{x: x \nleftrightarrow \partial B(n)} (\Gamma_n(x) - \Gamma(x)),$$

em que, naturalmente, $\partial B(n) = \{y \in B(n) : \|y\| = n\}$ são os vértices da fronteira de $B(n)$, isto é, vértices que possuem sítios vizinhos que não pertencem a $B(n)$. Além disso, o símbolo $x \leftrightarrow \partial B(n)$ indica que existe algum caminho de elos abertos ligando x à fronteira de $B(n)$. Analogamente, denotamos $x \nleftrightarrow \partial B(n)$ quando não há tal caminho.

Notemos que $\Gamma_n(x) = |C_n(x)|^{-1} = |C(x)|^{-1} = \Gamma(x)$ sempre que $x \leftrightarrow \partial B(n)$, já que, neste caso, x pertencerá a um cluster inteiramente contido em $B(n)$, fazendo com que $|C_n(x)| = |C(x)|$, ou seja, $\sum_{x: x \nleftrightarrow \partial B(n)} (\Gamma_n(x) - \Gamma(x)) = 0$. Daí,

$$\sum_{x \in B(n)} \Gamma_n(x) = \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) + \sum_{x: x \leftrightarrow \partial B(n)} (\Gamma_n(x) - \Gamma(x)). \quad (3.7)$$

Pela linearidade da soma e seguidamente pelo fato de que $\sum_{x: x \leftrightarrow \partial B(n)} \Gamma(x) \geq 0$, visto que $\Gamma(x)$ é uma função não-negativa, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) + \sum_{x: x \leftrightarrow \partial B(n)} (\Gamma_n(x) - \Gamma(x)) &= \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) + \sum_{x: x \leftrightarrow \partial B(n)} \Gamma_n(x) - \sum_{x: x \leftrightarrow \partial B(n)} \Gamma(x) \\ &\leq \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) + \sum_{x: x \leftrightarrow \partial B(n)} \Gamma_n(x). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por (3.7) e (3.8), segue que

$$\sum_{x \in B(n)} \Gamma_n(x) \leq \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) + \sum_{x: x \leftrightarrow \partial B(n)} \Gamma_n(x). \quad (3.9)$$

Pela mesma justificativa dada na equação (3.2), tem-se que $\sum_{x: x \leftrightarrow \partial B(n)} \Gamma_n(x)$ é exatamente o número de clusters abertos de $B(n)$ que tocam $\partial B(n)$. Além disso, não podem existir mais clusters abertos que tocam $\partial B(n)$ que vértices em $\partial B(n)$, isto é,

$$\sum_{x: x \leftrightarrow \partial B(n)} \Gamma_n(x) \leq |\partial B(n)|. \quad (3.10)$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B(n)|} \cdot \sum_{x \in B(n)} \Gamma_n(x) &\leq \frac{1}{|B(n)|} \cdot \left(\sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) + \sum_{x: x \leftrightarrow \partial B(n)} \Gamma_n(x) \right) \\ &\leq \frac{1}{|B(n)|} \cdot \left(\left(\sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) \right) + |\partial B(n)| \right) \\ &= \frac{1}{|B(n)|} \cdot \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) + \frac{|\partial B(n)|}{|B(n)|} \longrightarrow \mathbb{E}_p(\Gamma(0)) = \kappa(p) \quad \mathbb{P}_p - \mathbf{q.c.}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

quando $n \rightarrow \infty$. A primeira desigualdade segue de (3.9) e a segunda advém de (3.10); a igualdade é imediata. A convergência é consequência do limite em (3.4) e ao fato que, em \mathbb{Z}^d , $B(n)$ possui $(2n+1)^d$ vértices e $\partial B(n)$ possui $(2n+1)^d - (2n-1)^d$ vértices. Daí,

$$\frac{|\partial B(n)|}{|B(n)|} = \frac{(2n+1)^d - (2n-1)^d}{(2n+1)^d} = 1 - \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^d = 1 - \left(1 - \frac{2}{2n+1} \right)^d \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. A última igualdade é, como havíamos destacado anteriormente, resultado das definições de $\kappa(p)$ e $\Gamma(0)$.

Com isso, temos diretamente de (3.2), (3.5) e (3.11), que

$$\frac{K_n}{|B(n)|} \rightarrow \kappa(p) \quad \mathbb{P}_p - \text{q.c.},$$

quando $n \rightarrow \infty$. Como não pode haver mais clusters que vértices em $B(n)$, isto é, $\left| \frac{K_n}{|B(n)|} \right| \leq 1$, segue que $\frac{K_n}{|B(n)|}$ é uma função limitada. Logo, conclui-se também que

$$\frac{K_n}{|B(n)|} \rightarrow \kappa(p) \quad \text{em } L^1(\mathbb{P}_p),$$

pelo Teorema da Convergência Dominada. \square

Observação 3.1. Mais geralmente, para $1 \leq q < \infty$, temos novamente pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\frac{K_n}{|B(n)|} \rightarrow \kappa(p) \quad \text{em } L^q(\mathbb{P}_p).$$

3.2 Lattice Animals e Grandes Desvios

Nesta seção, iniciaremos o caminho para provar a diferenciabilidade (e diferenciabilidade contínua) de $\kappa(p)$. Mas antes, faremos algumas definições, e apresentaremos alguns resultados prévios. Dentre estes, o último, e mais importante resultado, será bastante útil para conseguir a demonstração almejada. Este resultado é um teorema que se assemelha às estimativas de grandes desvios, apesar de não sê-la, e será demonstrado através de argumentos combinatórios e de Teoria dos Grafos, os quais nortearão esta seção. Consegue-se, por exemplo, estimar as funções $\theta(p)$, $\chi(p)$ e $\kappa(p)$ em termos de $|C|$ através de argumentos puramente combinatórios.

Definição 3.2. *Um animal é definido como um subgrafo finito e conexo de \mathbb{L}^d que contém a origem. Por exemplo, o cluster aberto de percolação contendo a origem é um animal, caso seja finito.*

Definição 3.3. *Sendo $A \in \mathbb{L}^d$ um animal, define-se:*

- (i) $A_v := \{x \in \mathbb{Z}^d : x \in A\}$ como o conjunto de vértices de A ;
- (ii) $A_e := \{\alpha \in \mathbb{E}^d : \alpha \in A\}$ como o conjunto de elos de A ;
- (iii) $\Delta A := \{\alpha \in \mathbb{E}^d : \alpha \notin A_e, \exists \beta \in A_e; \alpha \sim \beta\}$ como o conjunto de elos que não pertencem a A , mas possuem extremidade em A_v ;

em que denotaremos $\alpha \sim \beta$ quando os elos α e β compartilharem um vértice em comum. Chamaremos, por vezes, o conjunto ΔA de o conjunto dos elos da fronteira de A .

Definição 3.4. Chamaremos de \mathcal{A}_{nmb} o conjunto de animais A tais que $|A_v| = n$, $|A_e| = m$, e $|\Delta A| = b$. Além disso, expressaremos $a_{nmb} := |\mathcal{A}_{nmb}|$ para o número de possíveis animais de cada terna (n, m, b) .

Para facilitar o entendimento, eis uma figura exemplificativa:

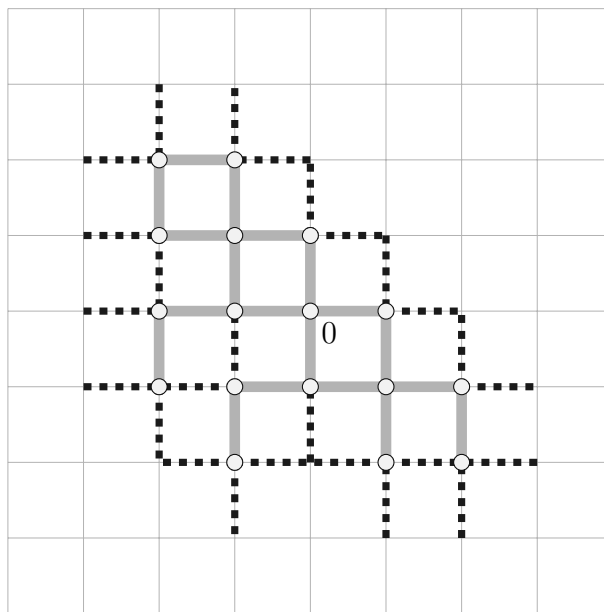


Figura 3.1: Animal do conjunto $\mathcal{A}_{17,19,26}$ em \mathbb{L}^2 .

Na figura acima, está ilustrado um exemplo de animal, cujos vértices são os círculos brancos de borda negra e os elos estão com tom cinza. Os elos da fronteira encontram-se tracejados em preto. Observe que a origem, denotada como 0, é um vértice do animal. Este é um espécime do conjunto $\mathcal{A}_{17,19,26}$ no grafo \mathbb{L}^2 .

Observando com cuidado, vê-se que, em muitos casos, $a_{nmb} = 0$. Vejamos um exemplo simples: para $d = 2$, se $b \in \{1, 2, 3\}$, então já temos $a_{nmb} = 0$. Pensando em \mathbb{Z}^2 , pelo fato de qualquer animal ser finito, haverá pelo menos um vértice do tipo (x, y) em que x é máximo (ou mínimo) dentre os vértices do animal e y é máximo (ou mínimo) dentre os vértices do animal. Cada condição extremal desta gera um elo na fronteira, independentemente de haver repetição de vértice com algumas destas propriedades. Com isso, qualquer animal em \mathbb{L}^2 tem ao menos 4 elos na fronteira. Desta maneira, enunciaremos dois resultados, que restringirão nossa atenção apenas para ternas (n, m, b) que satisfazem certas condições, a fim de evitar tais inconvenientes.

Proposição 3.1. *Sejam A animal, e \mathcal{A}_{nmb} e a_{nmb} como definidos anteriormente. Para que $a_{nmb} \neq 0$, devemos ter*

$$1 \leq b \leq 2dn. \quad (3.12)$$

Demonstração. Para a primeira desigualdade de (3.12), basta notar que $|A_v| < \infty$, já que A é finito, por ser animal. Logo, existe algum vértice de A que compartilha um elo α com um vértice que não pertence a A ; caso contrário, \mathbb{L}^d não seria conexo. Assim, por definição, $\alpha \in \Delta A$, isto é, $b \geq 1$.

Para a segunda desigualdade, basta notar que, em A , existem n vértices, e cada um desses vértices possui $2d$ elos adjacentes. Logo, mesmo considerando grosseiramente que todos esses elos são distintos e pertencem a ΔA , ainda temos um limitante para b , que é $b \leq 2dn$, como queríamos. \square

Observação 3.2. Vale que $2d \leq b$ mas a cota inferior em (3.12) já é suficiente para o escopo desta seção. Além disso, é possível refinar a cota superior em (3.12) usando a proposição seguinte, mas a cota que demos, apesar de pouco precisa, é também suficiente para o que intentamos.

Proposição 3.2. *Sejam A animal e \mathcal{A}_{nmb} e a_{nmb} como definidos acima. Para que $a_{nmb} \neq 0$, devemos ter*

$$n - 1 \leq m \leq dn. \quad (3.13)$$

Demonstração. A primeira desigualdade pode ser provada por uma simples indução em n . Para $n = 1$, o animal não possui elos (é constituído apenas da origem), ou seja, $m = 0$, valendo a desigualdade $n - 1 \leq m$. Suponhamos que a desigualdade seja válida para todo animal com k vértices, ou seja, o animal tem ao menos $k - 1$ elos. Assim, ao acrescentarmos mais um vértice, ficando agora com $k + 1$ vértices, devemos também acrescentar um elo, já que o animal é um grafo conexo. Com isso, existirão no mínimo k elos, completando a indução.

Para a segunda desigualdade de (3.13), usaremos um argumento de contagem dupla. Sabemos que, para cada um dos n vértices de A , existem $2d$ elos adjacentes, não necessariamente pertencentes a A . Assim, contamos não mais que $2dn$ elos adjacentes a algum vértice de A . Como cada elo de A é contado duas vezes, já que seus dois respectivos vértices pertencem a A_v , temos que $m = |A_e| \leq \frac{1}{2} \cdot 2dn = dn$, como queríamos mostrar. \square

Afirmção 3.1. *Sendo \mathcal{A} o conjunto de todos os animais, inferimos que se $A \in \mathcal{A}$, então*

$$\mathbb{P}_p(C = A) = p^m \cdot (1 - p)^b, \quad (3.14)$$

em que $|A_e| = m$ e $|\Delta A| = b$.

Com efeito, a ocorrência de um animal dado está unicamente associada ao fato de seus m elos estarem abertos e de seus b elos fronteiros estarem fechados. Pela independência do estado (aberto ou fechado) de cada elo de \mathbb{E}^d , ratifica-se a afirmação.

Desta forma, pela equação (3.14), conseguimos chegar ao seguinte resultado:

Afirmção 3.2. *A probabilidade de que C contenha exatamente n vértices é*

$$\mathbb{P}_p(|C| = n) = \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot p^m \cdot (1-p)^b. \quad (3.15)$$

De fato, temos que

$$\mathbb{P}_p(|C| = n) = \sum_{\substack{|A|=n \\ A \in \mathcal{A}}} \mathbb{P}_p(C = A) = \sum_{\substack{|A|=n \\ A \in \mathcal{A}}} p^{|A_e|} \cdot (1-p)^{|\Delta A|} = \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot p^m \cdot (1-p)^b,$$

em que a primeira igualdade é devida ao particionamento do conjunto de todos os animais com n vértices. A segunda igualdade é resultado da equação (3.14). A última segue simplesmente do fato de que a quantidade de animais com n vértices é igual a $\sum_{m,b} a_{nmb}$, mostrando que a afirmação 3.2 é válida.

Observação 3.3. Para n fixado, temos, pelas desigualdades (3.12) e (3.13), que m e b só podem assumir uma finidade de valores. Isto significa que $\sum_{m,b} a_{nmb} \cdot p^m \cdot (1-p)^b$ é um polinômio de grau finito em p . Consequentemente, por (3.15), $\mathbb{P}_p(|C| = n)$ é um polinômio de grau finito em p , ou seja, é uma função analítica. Entretanto, não é tão simples estabelecer continuidade e diferenciabilidade para as funções

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(|C| = \infty) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_p(|C| = n) \quad (3.16)$$

e

$$\kappa(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n). \quad (3.17)$$

A justificativa para tal dificuldade surgir se deve ao fato de tais funções não serem determinadas por um polinômio de grau finito, como acontece com $\mathbb{P}_p(|C| = n)$.

Vamos começar a erigir a prova da diferenciabilidade, e diferenciabilidade contínua, da função $\kappa(p)$ através de um importante teorema, que nos dará base para tal. Antes de enunciarmos este teorema, faremos algumas asserções.

Ao derivarmos a função

$$\mathbb{P}_p(|C| = n) = \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot p^m \cdot (1-p)^b$$

com respeito à variável p , supondo $0 < p = 1 - q < 1$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(|C| = n) &= \frac{d}{dp} \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot p^m \cdot (1-p)^b \\ &= \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot (mp^{m-1} \cdot q^b - bp^m \cdot q^{b-1}) \\ &= \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot \left(\frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right) \cdot p^m \cdot q^b. \end{aligned} \quad (3.18)$$

A primeira igualdade vem de (3.15), enquanto que a segunda é resultado da derivação na variável p . A terceira igualdade é direta, observando que, por hipótese, p e q são não-nulos.

Para grandes valores de n , a última soma de (3.18) possui comportamento dependente do valor $\frac{A_e}{p} - \frac{\Delta A}{q}$, em que A varia dentre os animais com n vértices. O notável teorema que segue, provado por Kesten em [Kesten(1982), página 85], nos fornece um limitante para a ocorrência de certos tipos de animais:

Teorema 3.2. *Existe $\epsilon > 0$ tal que, para $0 < x < \epsilon$,*

$$\sum_{m,b: \left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| > dxn} a_{nmb} \cdot p^m \cdot q^b \leq 3d^2 n^2 \exp\left(-\frac{1}{3}nx^2p^2q\right), \quad (3.19)$$

em que $n \geq 1$ e $0 < p = 1 - q < 1$.

Observação 3.4. Escrevendo o Teorema 3.19 em termos de probabilidades, temos que, para qualquer n natural, existe x suficientemente pequeno tal que

$$\mathbb{P}_p\left(|C| = n, \left| \frac{|A_e|}{p} - \frac{|\Delta A|}{q} \right| > dxn\right) \leq 3d^2 n^2 \exp\left(-\frac{1}{3}nx^2p^2q\right),$$

onde A é o animal correspondente ao cluster da origem.

Esta constatação segue da igualdade (3.15), com a restrição $\left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| > dxn$. Tal expressão suscita a seguinte interpretação heurística: animais de tamanho n são tão mais raros quanto mais se distanciam da proporção $\frac{m}{p} \approx \frac{b}{q}$. De forma pouco rigorosa, porém muito pictórica, percebe-se que o cluster de percolação, quando finito e grande, apresenta um formato semelhante a um fractal cuja dimensão depende do parâmetro p e da dimensão d .

Em vez de usarmos ferramentas probabilísticas na demonstração do Teo-

rema 3.2, lançaremos mão basicamente de argumentos combinatórios. Seguiremos o molde de prova contido em [Kesten(1982)].

Demonstração. (do Teorema 3.2) Primeiramente, observemos que, na igualdade (3.15), ao somarmos em todo n natural,

$$\mathbb{P}_p(|C| < \infty) = \sum_{n,m,b} a_{nmb} \cdot p^m \cdot q^b \leq 1, \quad (3.20)$$

em que $0 \leq p = 1 - q \leq 1$. Notemos, em seguida, que a quantidade de animais de n vértices cresce, no máximo, à taxa exponencial, quando $n \rightarrow \infty$. De maneira mais explícita, enunciamos a seguinte afirmação:

Afirmção 3.3. *Para todo n natural, $\sum_{m,b} a_{nmb} \leq 7^{dn}$.*

De fato, para cada n fixado, e para todo $p \in [0, 1]$,

$$\sum_{m,b} a_{nmb} \cdot p^m \cdot q^b \geq \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot p^{dn} \cdot q^{2dn} = (pq^2)^{dn} \cdot \sum_{m,b} a_{nmb}. \quad (3.21)$$

A desigualdade é justificada por p e q pertencerem ao intervalo $[0, 1]$, associado às desigualdades (3.12) e (3.13).

Por (3.20), temos, para todo n natural, $\sum_{m,b} a_{nmb} \cdot p^m \cdot q^b \leq 1$. Unindo este fato à desigualdade (3.21), temos, para qualquer $p \in [0, 1]$,

$$(pq^2)^{dn} \cdot \sum_{m,b} a_{nmb} \leq 1 \Rightarrow \sum_{m,b} a_{nmb} \leq (pq^2)^{-dn}. \quad (3.22)$$

Escolheremos p a fim de maximizarmos $pq^2 = p \cdot (1 - p)^2$. Para isso, derivamos $p \cdot (1 - p)^2$ com relação à p , obtendo $3p^2 - 4p + 1 = (p - 1)(3p - 1)$, que possui raízes $\frac{1}{3}$ e 1 , fornecendo $q = \frac{2}{3}$ e $q = 0$. Para os casos de fronteira em que $p = 1$ ou $p = 0$, tem-se $pq^2 = 0$, que são casos a serem desprezados. Se $p = \frac{1}{3}$, $pq^2 = \frac{4}{27}$. Daí, substituindo este valor em (3.22), obtemos

$$\sum_{m,b} a_{nmb} \leq \left(\frac{4}{27}\right)^{-dn} = \left(\frac{27}{4}\right)^{dn} \leq 7^{dn},$$

provando a Afirmção 3.3.

Por (3.20), deduzimos que $a_{nmb} \cdot p^m \cdot (1 - p)^b \leq 1$, para qualquer quadra (n, m, b, p) . Respeitando a igualdade $p + q = 1$ e o fato de p e q pertencerem ao

intervalo $[0, 1]$, ao tomarmos $p = \frac{m}{m+b}$ e $q = \frac{b}{m+b}$, para todo $n \geq 2$, obtemos

$$a_{nmb} \leq p^{-m} \cdot q^{-b} = \left(\frac{m+b}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{m+b}{b}\right)^b. \quad (3.23)$$

A desigualdade acima é oriunda de $a_{nmb} \cdot p^m \cdot (1-p)^b \leq 1$, enquanto que a igualdade é advinda dos valores de p e q assumidos. É importante ressaltar que a desigualdade (3.23) fornece uma cota superior para $\sum_n a_{nmb}$, ou seja, um limite máximo para a quantidade de animais com m elos e b elos na fronteira.

Para $n \geq 2$ fixado,

$$\begin{aligned} \sum_{m,b: \left|\frac{m-b}{p-q}\right| > dxn} a_{nmb} \cdot p^m \cdot q^b &\leq \sum_{m,b: \left|\frac{m-b}{p-q}\right| > dxn} \left(\frac{m+b}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{m+b}{b}\right)^b \cdot p^m \cdot q^b \\ &\leq 2d^2 n^2 \max\{f(m, b)\}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

em que

$$f(m, b) = \left(\frac{(m+b) \cdot p}{m}\right)^m \left(\frac{(m+b) \cdot q}{b}\right)^b,$$

e o máximo é tomado sobre m e b , satisfazendo

- (i) $1 \leq b \leq 2dn$, ou seja, (3.12);
- (ii) $n-1 \leq m \leq dn$, isto é, (3.13);
- (iii) $|mq - bp| > dxnpq$.

A primeira desigualdade de (3.24) é resultado de (3.23), que vale para quaisquer p e q , sendo válida também com a restrição (iii). A segunda desigualdade segue, além da própria definição de $f(m, b)$, do fato que o somatório é realizado em m e b , usando as desigualdades $b \leq 2dn$ e $m \leq dn$ das restrições (i) e (ii).

Como de (3.13), $m \leq dn$, temos que

$$|mq - bp| > dxnpq \Rightarrow |mq - bp| \geq xmpq,$$

isto é, $\max\{f(m, b)\}$ não é maior que o máximo de $\{f(m, b)\}$ restrito à desigualdade $|mq - bp| \geq xmpq$.

Fixando m , e usando a própria definição de $f(m, b)$, temos que

$$f(m, y) = \left(\frac{(m+y) \cdot p}{m}\right)^m \left(\frac{(m+y) \cdot q}{y}\right)^y$$

é função da variável contínua y , sendo assim, uma função contínua para $y > 0$, e também derivável para y positivo, já que $f(m, y)$ é expressa por composição de

operações cujas derivadas são conhecidas. Definindo $g_m(y) := \log f(m, y)$, temos, por substituição e propriedades básicas de logaritmos, que

$$\begin{aligned} g_m(y) &:= \log f(m, y) = \log \left[\left(\frac{(m+y) \cdot p}{m} \right)^m \left(\frac{(m+y) \cdot q}{y} \right)^y \right] \\ &= m \cdot \log \left(\frac{(m+y) \cdot p}{m} \right) + y \cdot \log \left(\frac{(m+y) \cdot q}{y} \right). \end{aligned}$$

Derivando $g_m(y)$ com respeito à variável y , obtemos

$$\begin{aligned} g'_m(y) &:= \frac{dg_m(y)}{dy} = \left[m \cdot \log \left(\frac{(m+y) \cdot p}{m} \right) + y \cdot \log \left(\frac{(m+y) \cdot q}{y} \right) \right]' \\ &= [m \cdot \log[(m+y)p] - m \cdot \log m + y \cdot \log[(m+y)q] - y \cdot \log y]'. \end{aligned}$$

Prosseguindo os cálculos, usando apenas as propriedades de logaritmos e regras de derivação, temos

$$\begin{aligned} g'_m(y) &= [m \cdot \log(m+y) + m \cdot \log p - m \cdot \log m + y \cdot \log(m+y) + y \cdot \log q - y \cdot \log y]' \\ &= \frac{m}{m+y} + \log(m+y) + \frac{y}{m+y} + \log q - \log y - 1 \\ &= \log(m+y) + \log q - \log y = \log \left(\frac{(m+y) \cdot q}{y} \right). \end{aligned}$$

Observando que $q = 1 - p$, tem-se

$$\begin{aligned} g'_m(y) &= \log \left(\frac{(m+y) \cdot (1-p)}{y} \right) = \log \left(\frac{m - mp + y - yp}{y} \right) \\ &= \log \left(1 + \frac{m(1-p) - yp}{y} \right) = \log \left(1 + \frac{mq - yp}{y} \right). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Como y é positivo, temos, pela expressão (3.25), que

- (a) $mq - yp > 0 \Rightarrow g'_m(y) > 0 \Rightarrow g_m(y)$ é crescente;
- (b) $mq - yp < 0 \Rightarrow g'_m(y) < 0 \Rightarrow g_m(y)$ é decrescente.

Abaixo, segue um esboço da função $g_m(y)$. Preocupamo-nos somente com suas regiões de crescimento e decrescimento, irrelevando assimetria, sinal das raízes ou concavidade da função.

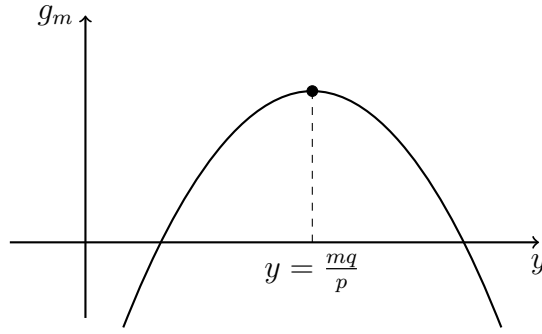


Figura 3.2: Ilustração da função $g_m(y)$.

Com isso, o valor máximo de $g_m(y)$ restrito aos valores de y tais que $|mq - yp| \geq xmpq$ ocorre quando $mq - yp = xmpq$ ou quando $mq - yp = -xmpq$. Estas duas possibilidades ocorrem quando

$$mq - yp = \pm xmpq \Rightarrow yp = mq \pm xmpq \Rightarrow yp = mq(1 \pm xp) \Rightarrow y = mqp^{-1}(1 \pm xp).$$

Desta forma, como temos a expressão de $g_m(y)$, calculamos explicitamente os valores de $g_m(mqp^{-1}(1 \pm xp))$, obtendo

$$\begin{aligned} g_m(mqp^{-1}(1 \pm xp)) &= m \cdot \log \left(\frac{[m + mqp^{-1}(1 \pm xp)] \cdot p}{m} \right) \\ &\quad + mqp^{-1}(1 \pm xp) \cdot \log \left(\frac{[m + mqp^{-1}(1 \pm xp)] \cdot q}{mqp^{-1}(1 \pm xp)} \right). \end{aligned}$$

Resolvendo este último termo, obtemos

$$\begin{aligned} g_m(mqp^{-1}(1 \pm xp)) &= m \cdot \log \left(\frac{mp + mq(1 \pm xp)}{m} \right) \\ &\quad + (mqp^{-1} \pm mqx) \cdot \log \left(\frac{mq + mq^2p^{-1}(1 \pm xp)}{mqp^{-1}(1 \pm xp)} \right) \\ &= m \cdot \log(p + q(1 \pm xp)) + mqp^{-1}(1 \pm xp) \cdot \log \left(\frac{1 + qp^{-1}(1 \pm xp)}{p^{-1}(1 \pm xp)} \right) \\ &= m \cdot \log(p + q \pm xpq) + mqp^{-1}(1 \pm xp) \cdot \log \left(\frac{p}{1 \pm xp} + q \right). \end{aligned}$$

Utilizando a igualdade $p + q = 1$, chegamos à expressão

$$\begin{aligned} g_m(mqp^{-1}(1 \pm xp)) &= m \cdot \log(1 \pm xpq) + mqp^{-1}(1 \pm xp) \cdot \log \left(\frac{p + q \pm xpq}{1 \pm xp} \right) \\ &= m \cdot \log(1 \pm xpq) + mqp^{-1}(1 \pm xp) \cdot \log \left(\frac{1 \pm xpq}{1 \pm xp} \right) \\ &= -\frac{1}{2}mx^2p^2q(1 + O(x)), \end{aligned}$$

em que $g(x) = O(x) \Leftrightarrow |g(x)| \leq c|x|$, para alguma constante real c . A justificativa da última igualdade é dada pela Afirmação 3.4, que será agora enunciada e demonstrada.

Afirmação 3.4. Para $x > 0$ suficientemente pequeno, $p, q \in [0, 1]$ e m inteiro não-negativo, vale que

$$m \cdot \log(1 \pm xpq) + mqp^{-1}(1 \pm xp) \cdot \log\left(\frac{1 \pm xpq}{1 \pm xp}\right) = -\frac{1}{2}mx^2p^2q(1 + O(x)).$$

Demonstração. Como a série para $x > -1$ de $\log(1 + x)$ é

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,$$

e a série para $x < 1$ de $\log(1 - x)$ é

$$\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots,$$

pela Fórmula de Taylor infinitesimal, temos

$$(i) \log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \cdot O(x);$$

$$(ii) \log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - x^2 \cdot O(x).$$

Aplicando (i) e (ii) no termo da à esquerda da Afirmação 3.4, obtemos

$$\begin{aligned} & m \cdot \log(1 \pm xpq) + mqp^{-1}(1 \pm xp) \cdot \log\left(\frac{1 \pm xpq}{1 \pm xp}\right) \\ &= m \left(\pm xpq - \frac{x^2p^2q^2}{2} \pm x^2p^2q^2 \cdot O(x) \right) \\ &+ mqp^{-1}(1 \pm xp) \left[\pm xpq - \frac{x^2p^2q^2}{2} \pm x^2p^2q^2 \cdot O(x) - \left(\pm xp - \frac{x^2p^2}{2} \pm x^2p^2 \cdot O(x) \right) \right] \\ &= \pm mxpq - \frac{mx^2p^2q^2}{2} \pm mx^2p^2q^2 \cdot O(x) \pm mxq^2 - \frac{mx^2pq^3}{2} \pm mx^2pq^3 \cdot O(x) \mp mqx \\ &+ \frac{mx^2pq}{2} \mp mx^2pq \cdot O(x) + mx^2pq^2 \mp \frac{mx^3p^2q^3}{2} + mx^3p^2q^3 \cdot O(x) \\ &- mx^2pq \pm \frac{mx^3p^2q}{2} - mx^3p^2q \cdot O(x), \end{aligned}$$

em que os símbolos \pm e \mp são referentes à admissão de um sinal conforme a sua posição. Como $p + q = 1$, nota-se que

$$\pm mxpq \pm mxq^2 \mp mqx = mqx(\pm p \pm q \mp 1) = 0.$$

Assim, o primeiro, quarto e sétimo somandos da última expressão somam zero. Agrupando, convenientemente, $-\frac{1}{2}mx^2p^2q$, na última expressão, tem-se, para $p \neq 0$,

$$m \cdot \log(1 \pm xpq) + mqp^{-1}(1 \pm xp) \cdot \log\left(\frac{1 \pm xpq}{1 \pm xp}\right) = -\frac{1}{2}mx^2p^2q \\ \cdot \left(O(x) \left[\pm 2q \mp \frac{2q^2}{p} \pm \frac{2}{p} - 2xq^2 + 2x\right] + q + \frac{q^2}{p} - \frac{1}{p} - \frac{2q}{p} \pm xq^2 + \frac{2}{p} \mp x\right).$$

Notemos que, se $p = 0$, a Afirmação 3.4 é claramente válida. Os termos primeiro, segundo, terceiro, quarto e sexto dentro dos parênteses e fora dos colchetes da última expressão somam 1. Com efeito, para p não-nulo,

$$q + \frac{q^2}{p} - \frac{1}{p} - \frac{2q}{p} + \frac{2}{p} = \frac{pq + q^2 - 1 - 2q + 2}{p} = \frac{p(1-p) + (1-p)^2 - 1 - 2(1-p) + 2}{p} \\ = \frac{p - p^2 + p^2 - 2p + 1 - 1 - 2 + 2p + 2}{p} = \frac{p}{p} = 1.$$

Com isto, temos

$$m \cdot \log(1 \pm xpq) + mqp^{-1}(1 \pm xp) \cdot \log\left(\frac{1 \pm xpq}{1 \pm xp}\right) = -\frac{1}{2}mx^2p^2q \\ \cdot \left(1 \mp 2q \cdot O(x) \mp \frac{2q^2}{p} \cdot O(x) \pm \frac{2}{p} \cdot O(x) \pm xq^2 - 2xq^2 \cdot O(x) \mp x + 2x \cdot O(x)\right).$$

Agora, observamos que

- (i) $\mp 2q \cdot O(x) = O(x)$, já que $q \in [0, 1]$;
- (ii) $\mp \frac{2q^2}{p} \cdot O(x) \pm \frac{2}{p} \cdot O(x) = O(x)$, pois $\mp \frac{2q^2}{p} \pm \frac{2}{p} = \frac{\mp p^2 \pm 2p \mp 2 \pm 2}{p} = \mp p \pm 2$, que também é finito;
- (iii) $\pm xq^2 = O(x)$, já que, como $q^2 \leq 1$, tem-se $|\pm x|q^2 \leq |x|$;
- (iv) $-2xq^2 \cdot O(x) = O(x)$, já que $2q^2$ é limitado e x é suficientemente pequeno, por hipótese;
- (v) $\mp x = O(x)$, pois $|\mp x| \leq |x|$;
- (vi) $2x \cdot O(x) = O(x)$, por 2 ser uma constante, logo limitada, e x ser suficientemente pequeno, por hipótese.

Por (i)-(vi), e pelo fato do número de somandos dentro dos parênteses ser finito, conclui-se que

$$m \cdot \log(1 \pm xpq) + mqp^{-1}(1 \pm xp) \cdot \log\left(\frac{1 \pm xpq}{1 \pm xp}\right) = -\frac{1}{2}mx^2p^2q(1 + O(x)),$$

provando a Afirmação 3.4. □

Como $g_m(y) := \log f(m, y)$, temos que

$$f(m, y) = e^{\log f(m, y)} = \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot mx^2p^2q(1 + O(x))\right).$$

Daí, para $m \geq 0$ e n fixados, satisfazendo $m \leq dn$, tem-se

$$\max\{f(m, b) : |mp^{-1} - bq^{-1}| > dxn\} \leq \max\{f(m, b)\} \leq \exp\left(-\frac{1}{3} \cdot mx^2p^2q\right), \quad (3.26)$$

para todo x suficientemente pequeno. A primeira desigualdade vem do fato de o máximo de $f(m, b)$ nunca aumentar, ao impor-se restrições. A segunda desigualdade segue da limitação de $O(x)$, para x suficientemente pequeno. Isto é, para todo x pequeno o suficiente, em função da constante c de $O(x)$, temos $|O(x)| < \frac{1}{3}$. Daí, chegamos a $(-\frac{1}{2} \cdot mx^2p^2q(1 + O(x))) \leq (-\frac{1}{3} \cdot mx^2p^2q)$, como queríamos.

Substituindo (3.26) na inequação (3.24), obtemos a primeira das igualdades abaixo

$$\begin{aligned} \sum_{m, b: \left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| > dxn} a_{nmb} \cdot p^m \cdot q^b &\leq 2d^2n^2 \cdot \max\left\{ \exp\left(-\frac{1}{3}mx^2p^2q\right) : m \geq n-1 \right\} \\ &\leq 2d^2n^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{3} \cdot (n-1)x^2p^2q\right) \\ &= 2d^2n^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{3}nx^2p^2q\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{3}x^2p^2q\right) \\ &\leq 3d^2n^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{3}nx^2p^2q\right), \end{aligned}$$

se $n \geq 2$, para x suficientemente pequeno. A segunda desigualdade se justifica pelo fato de o expoente ser maior, quanto menor for m . A igualdade é imediata, enquanto que a última inequação se explica pelo fato de $\exp\left(\frac{1}{3}x^2p^2q\right) < \frac{3}{2}$ para pequenos valores de x , já que p e q são limitadas. Desta forma, o Teorema 3.2 está provado para $n \geq 2$, restando o caso em que $n = 1$.

Se $n = 1$, temos $m = 0$ e $b = 2d$. Logo, nos resta provar que existe $\epsilon > 0$ tal que se $x \in (0, \epsilon)$, então

$$\sum_{m, b: \left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| > dx} a_{1mb} \cdot p^m \cdot q^b \leq 3d^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{3}x^2p^2q\right). \quad (3.27)$$

Mas, note que, como há um único animal com somente um vértice, o primeiro membro da desigualdade (3.27) vale q^{2d} , com $q < \frac{2}{x}$, pela restrição sob o soma-

tório. Observemos que, para $x < 1$, como $\max\{p^2q\} = \frac{4}{27}$, $-\frac{1}{3}x^2p^2q > -1$, isto é, $\exp\left(-\frac{1}{3}x^2p^2q\right) > \frac{1}{e}$. Isto significa que, independente da dimensão que estejamos, $3d^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{3}x^2p^2q\right) > 1$. Como $0 < q < 1$, segue que $q^{2d} < 1$, já que $d \geq 1$. Com isso, conseguimos diretamente a validade da desigualdade (3.27), findando a demonstração do Teorema 3.2. \square

3.3 Diferenciabilidade de $\kappa(p)$

A partir de agora, como aplicação do Teorema 3.2, provaremos o resultado central deste trabalho: $\kappa(p)$ é continuamente diferenciável em $[0, 1)$. É possível mostrar a diferenciabilidade contínua no intervalo $[0, 1]$; contudo, apenas com artifícios oriundos do Teorema 3.2, o caminho não é tão fácil, conforme está vaticinado em [Grimmett]. Enunciaremos adiante o Teorema 3.5, que garante que $\kappa(p)$ é continuamente diferenciável em $(p_c, 1]$, e justificaremos a dificuldade em garantirmos esta propriedade para $p = 1$ usando apenas os resultados vistos até então.

Teorema 3.3. *O número $\kappa(p)$ de clusters abertos por vértice é continuamente diferenciável em $[0, 1)$.*

Com argumentos que não tangem ao que foi exposto neste texto, é possível provar os seguintes resultados:

Teorema 3.4. *$\kappa(p)$ é analítica em $[0, p_c)$.*

Teorema 3.5. *$\kappa(p)$ é infinitamente diferenciável em $(p_c, 1]$.*

Neste caso, nos restaria provar a diferenciabilidade contínua no ponto crítico quando $d \geq 2$ – já vimos que, para $d = 1$, $\kappa(p) = 1 - p$, logo é claramente analítica em $[0, 1]$ – isto é, quando $p_c \in (0, 1)$. Assim, obteríamos o Teorema 3.3, e também a diferenciabilidade contínua em $p = 1$.

Observação 3.5. Algumas questões acerca de $\kappa(p)$ ainda não foram respondidas, como por exemplo a sua analiticidade na fase supercrítica e sua diferenciabilidade em p_c . Em [Kesten(1982)], está provado que $\kappa(p)$ é duas vezes diferenciável em $p_c(2)$, contudo o problema continua em aberto para dimensões superiores. Conjectura-se que, para $d \geq 2$, $\kappa(p)$ é duas vezes diferenciável em p_c , mas não é três vezes diferenciável.

Retomemo-nos a demonstrar o Teorema 3.3 lançando mão apenas dos resultados aqui construídos. Antes, de iniciarmos a prova, enunciaremos o seguinte resultado de Análise:

Lema 3.1. *Seja $\sum_n f_n$ uma série de funções deriváveis no intervalo $[a, b]$. Se $\sum_n f_n(c)$ converge para um certo $c \in [a, b]$ e a série $\sum_n f'_n = g$ converge uniformemente em $[a, b]$, então $\sum_n f_n = f$ converge uniformemente em $[a, b]$ e f é derivável, com $f' = g$.*

Este lema será crucial na demonstração do Teorema 3.3, e pode ser encontrado em [Elon], na página 381.

Demonstração. (do Teorema 3.3) Provaremos, de início, que $\kappa(p)$ é continuamente diferenciável em $(0, 1)$. Para tal, devemos, a priori, mostrar que

$$\kappa'(p) = \sum_{n,m,b} a_{nmb} (mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1})$$

é, de fato, a derivada de $\kappa(p)$. Pelas equações (3.15) e (3.17), obtém-se

$$\kappa(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot p^m \cdot (1-p)^b \right). \quad (3.28)$$

Ao definirmos

$$f_n(p) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot p^m \cdot (1-p)^b, \quad (3.29)$$

sabemos que $\sum_n f_n$ é uma série de funções deriváveis no intervalo $[a, b]$, para quaisquer $0 < a < b < 1$. Com efeito, para n fixo, por (3.12) e (3.13), f_n é um polinômio finito.

Além disso, para $p = \frac{1}{8^d}$, temos que $\sum_n f_n(p)$ converge. De fato, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{1}{8^d} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot \left(\frac{1}{8^d} \right)^m \cdot \left(\frac{8^d - 1}{8^d} \right)^b \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot \left(\frac{1}{8^d} \right)^m \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 7^{dn} \cdot \left(\frac{1}{8^d} \right)^{n-1} = 8^d \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 7^{dn} \cdot \left(\frac{1}{8^d} \right)^n \\ &= 8^d \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8} \right)^{dn} = 8^d \cdot \frac{\left(\frac{7}{8} \right)^d}{1 - \left(\frac{7}{8} \right)^d} = \frac{56^d}{8^d - 7^d}, \end{aligned}$$

provando que esta série é convergente para $p = \frac{1}{8^d}$. A primeira igualdade segue de (3.29) e as demais são apenas operações simples ou com séries. A primeira desigualdade é oriunda de $\frac{1}{n}$ e $\left(\frac{8^d - 1}{8^d} \right)^b$ serem positivos menores que 1, para quaisquer n , b e d positivos. A última desigualdade vem, além da Afirmação 3.3, também da primeira desigualdade de (3.13) associada ao fato de $\frac{1}{8^d}$ ser positivo menor que 1. Em [Grimmett], não foi apresentada de forma explícita a convergência pontual da série

$\sum_n f_n(p)$, tarefa esta que acabamos de fazer, a fim de garantirmos a possibilidade de utilizar o Lema 3.1.

Para ratificarmos a validade de todas as hipóteses do Lema 3.1, ainda nos resta mostrar que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot p^m \cdot (1-p)^b \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{d}{dp} \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot p^m \cdot (1-p)^b \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot \left(\frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right) \cdot p^m \cdot q^b \end{aligned}$$

converge uniformemente em $[a, b]$ para quaisquer $0 < a \leq \frac{1}{8^d} \leq b < 1$, em que a segunda passagem é devida à (3.18).

Particionemos o somatório $\sum_{m,b} a_{nmb} \cdot \left(\frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right) \cdot p^m \cdot q^b$ em dois: o primeiro condicionado à restrição $\left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| > dxn$, e o segundo à restrição $\left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| \leq dxn$, em que x é um número suficientemente pequeno a ser escolhido a posteriori. No primeiro caso, usaremos a desigualdade

$$\left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| \leq \frac{3dn}{pq}, \quad (3.30)$$

que é verdadeira, pois, para $p \in (0, 1)$,

$$\left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| = \left| \frac{mq - bp}{pq} \right| \leq \frac{mq + bp}{pq} \leq \frac{m + b}{pq} \leq \frac{3dn}{pq}.$$

A primeira desigualdade é justificada por as m, p, q e b serem não-negativas, a segunda é explicada pelo fato de p e q pertencerem ao intervalo $(0, 1)$ e a última segue das desigualdades (3.12) e (3.13). Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \cdot \sum_{m,b: \left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| > dxn} a_{nmb} \cdot \left(\frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right) \cdot p^m \cdot q^b \right| &\leq n^{-1} \cdot \sum_{m,b: \left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| > dxn} a_{nmb} \cdot \left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| \cdot p^m \cdot q^b \\ &\leq n^{-1} \cdot \frac{3dn}{pq} \cdot \sum_{m,b: \left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| > dxn} a_{nmb} \cdot p^m \cdot q^b \\ &\leq \left(\frac{3d}{pq} \right) \cdot 3d^2 n^2 \cdot \exp \left(-\frac{1}{3} n x^2 p^2 q \right), \end{aligned} \quad (3.31)$$

em que a primeira desigualdade é imediata, pois n, a_{nmb}, p e q são positivos. As desigualdades seguintes são justificadas, respectivamente, pela desigualdade (3.30) e

pelo Teorema 3.2, considerando x suficientemente pequeno.

No segundo caso, em que $\left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| \leq dxn$, temos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \cdot \sum_{m,b: \left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| \leq dxn} a_{nmb} \cdot \left(\frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right) \cdot p^m \cdot q^b \right| &\leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{m,b: \left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| \leq dxn} a_{nmb} \cdot \left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| \cdot p^m \cdot q^b \\
&\leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{m,b: \left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| \leq dxn} a_{nmb} \cdot dxn \cdot p^m \cdot q^b \\
&= dx \cdot \sum_{m,b: \left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| \leq dxn} a_{nmb} \cdot p^m \cdot q^b \\
&\leq dx \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

A primeira desigualdade tem motivação igual à do primeiro caso, enquanto que a segunda é devida à restrição sob o somatório. A igualdade é imediata; já a última desigualdade é devida à identidade (3.15), observando que

$$\sum_{m,b: \left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| \leq dxn} a_{nmb} \cdot p^m \cdot q^b \leq \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot p^m \cdot q^b = \mathbb{P}_p(|C| = n),$$

por haver uma restrição a mais no primeiro somatório. Novamente pela identidade (3.15), pelas desigualdades (3.31) e (3.32) recém-obtidas da partição que realizamos, tem-se, para x suficientemente pequeno, que

$$\begin{aligned}
\left| n^{-1} \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(|C| = n) \right| &= \left| \frac{1}{n} \cdot \sum_{m,b: \left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| > dxn} a_{nmb} \cdot \left(\frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right) \cdot p^m \cdot q^b \right| \\
&+ \left| \frac{1}{n} \cdot \sum_{m,b: \left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| \leq dxn} a_{nmb} \cdot \left(\frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right) \cdot p^m \cdot q^b \right| \\
&\leq \left(\frac{3d}{pq} \right) \cdot 3d^2 n^2 \cdot \exp \left(-\frac{1}{3} nx^2 p^2 q \right) + dx \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Tomando $x = a(n^{-1} \cdot \log n)^{\frac{1}{2}}$, em que $a > 0$ será convenientemente escolhido, para

$n \geq N \geq 3$, tem-se

$$\begin{aligned} \left| n^{-1} \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(|C| = n) \right| &\leq da \sqrt{\frac{\log n}{n}} \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n) + \left(\frac{3d}{pq} \right) \cdot 3d^2 n^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{3} n x^2 p^2 q\right) \\ &\leq da \sqrt{\frac{\log N}{N}} \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n) + \left(\frac{3d}{pq} \right) \cdot 3d^2 n^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{3} n x^2 p^2 q\right), \end{aligned} \quad (3.34)$$

em que a desigualdade inicial se dá pela substituição de x , notando que, sendo $n \geq 3$ e $a > 0$, então $x > 0$. A última desigualdade se explica pelas desigualdades $n \geq N \geq 3$ e pelo fato de

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{\log x}{x}} \right) = \frac{1 - \log x}{2x^2 \cdot \sqrt{\frac{\log x}{x}}} \leq 0,$$

se $x \geq e$. Ou seja, $h(x) = \sqrt{\frac{\log x}{x}}$ é decrescente para x maior que e .

Ademais, substituindo $x = a(n^{-1} \cdot \log n)^{\frac{1}{2}}$ em $\left(\frac{3d}{pq} \right) \cdot 3d^2 n^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{3} n x^2 p^2 q\right)$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{3d}{pq} \right) \cdot 3d^2 n^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{3} \cdot n a^2 \frac{\log n}{n} \cdot p^2 q\right) &= \left(\frac{3d}{pq} \right) \cdot 3d^2 n^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{3} \cdot a^2 \log n \cdot p^2 q\right) \\ &= \left(\frac{3d}{pq} \right) \cdot 3d^2 n^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{3} \cdot n a^2 \frac{\log n}{n} \cdot p^2 q\right) \\ &= \left(\frac{3d}{pq} \right) \cdot 3d^2 n^2 \cdot n^{-\frac{1}{3} \cdot a^2 p^2 q} \\ &=: \gamma \cdot n^{2-a^2 \eta}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

em que as funções $\gamma = \gamma(p, d) := \left(\frac{3d}{pq} \right) \cdot 3d^2 < \infty$ e $\eta = \eta(p) = \frac{1}{3} \cdot pq > 0$ são contínuas em p para qualquer $p \in (0, 1)$. Como $p \in [a, b]$, com $0 < a < b < 1$, $q = 1 - p$ e d é fixo, ratifica-se que $\gamma < \infty$. Além disso, por p e q pertencem a $(0, 1)$, confirma-se que $\eta > 0$. Daí, por (3.34) e (3.35), temos que

$$\left| n^{-1} \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(|C| = n) \right| \leq da \sqrt{\frac{\log N}{N}} \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n) + \gamma \cdot n^{2-a^2 \eta}. \quad (3.36)$$

Escolhamos p_1 e p_2 tais que $0 < p_1 \leq \frac{1}{8d} \leq p_2 < 1$, ou seja, tomemos $[p_1, p_2]$ de forma que este intervalo contenha o ponto que nos garante a convergência pontual da série das derivadas de $\kappa(p)$ no Lema 3.1. Sejam $\hat{\gamma} := \max\{\gamma(p, d) : p_1 \leq p \leq p_2\}$ e $\hat{\eta} := \min\{\eta(p) : p_1 \leq p \leq p_2\}$ e, enfim, $a > 0$ suficientemente grande a fim de

que tenhamos $2 - a^2\hat{\eta} < -2$. Mais precisamente, devemos tomar $a > \sqrt{\frac{4}{\hat{\eta}}} > 0$. Observemos que, por $[p_1, p_2]$ ser compacto, existe o mínimo para $\eta(p)$, assim como para d fixo, existe o máximo para $\gamma(p, d)$.

Portanto, temos, em (3.36), ao passar o somatório partindo de $n = N$, que

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{\infty} \left| n^{-1} \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(|C| = n) \right| &\leq \sum_{n=N}^{\infty} \left[da \sqrt{\frac{\log N}{N}} \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n) \right] + \sum_{n=N}^{\infty} \gamma \cdot n^{2-a^2\eta} \\ &\leq \sum_{n=N}^{\infty} \left[da \sqrt{\frac{\log N}{N}} \cdot \mathbb{P}_p(|C| = n) \right] + \sum_{n=N}^{\infty} \hat{\gamma} \cdot \frac{1}{n^2}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

em que, $a > \sqrt{\frac{4}{\hat{\eta}}} > 0$ implica que $\frac{1}{n^2} \geq n^{2-a^2\hat{\eta}}$, já que a desigualdade $2 - a^2\hat{\eta} < -2$ é satisfeita. Ademais, $\hat{\gamma}$ tomado como o máximo dos valores de γ nunca diminui o último somando. Por d, a, N e $\hat{\gamma}$ independermos de n , e por $\sum_{n=N}^{\infty} \mathbb{P}_p(|C| = n) \leq 1$, temos, respectivamente, as passagens

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{\infty} \left| n^{-1} \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(|C| = n) \right| &\leq da \sqrt{\frac{\log N}{N}} \cdot \sum_{n=N}^{\infty} [\mathbb{P}_p(|C| = n)] + \hat{\gamma} \cdot \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &\leq da \sqrt{\frac{\log N}{N}} + \hat{\gamma} \cdot \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

para $p \in [p_1, p_2]$. Como $da \sqrt{\frac{\log N}{N}} + \hat{\gamma} \cdot \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ independe de p , e $\hat{\gamma} < \infty$, segue que

$\sum_{n=N}^{\infty} \left| n^{-1} \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(|C| = n) \right|$ converge uniformemente para 0, quando $N \rightarrow \infty$ em $p \in [p_1, p_2]$. Deste modo, conseguimos provar que, quando $N \rightarrow \infty$, então

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \cdot \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot \left(\frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right) \cdot p^m \cdot q^b \right| \xrightarrow{\text{unif.}} 0, \quad (3.38)$$

em $p \in [p_1, p_2]$.

Daí, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot \left(\frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right) \cdot p^m \cdot q^b \right)$$

converge uniformemente em $[p_1, p_2]$. Portanto, fazendo $p_1 \rightarrow 0$ e $p_2 \rightarrow 1$, concluimos que

$$\kappa(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot p^m q^b \right)$$

é diferenciável em $(0, 1)$, com derivada

$$\kappa'(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{m,b} a_{nmb} \left(\frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right) p^m q^b \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{m,b} a_{nmb} (mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) \right). \quad (3.39)$$

Esta derivada é contínua em $(0, 1)$, por (3.38), e notando que qualquer soma finita de termos $\frac{1}{n} \sum_{m,b} a_{nmb} (mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1})$ é um polinômio de grau finito, logo é contínua.

Para finalizarmos a prova do Teorema 3.3, devemos ainda demonstrar que $\kappa(p)$ é continuamente diferenciável em $p = 0$. Como a prova deste fato não é curta, a faremos a seguir como uma afirmação, em prol de facilitar a leitura.

Afirmção 3.5. $\kappa(p)$ é continuamente diferenciável em zero.

De fato, pelo Teorema 1.1, numa vizinhança do zero, $\theta(p) \equiv 0$, isto é, $\mathbb{P}_p(|C| < \infty) = 1$. Desta forma, na fase subcrítica,

$$1 = \mathbb{P}_p(|C| < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_p(|C| = n) = \sum_{n,m,b} a_{nmb} \cdot p^m \cdot q^b. \quad (3.40)$$

A segunda igualdade é imediata, e a última é resultado da Afirmção 3.2, considerando, naturalmente, $q = 1 - p$.

É nítido que $\kappa(0) = 1$, já que, neste caso, é certo que o único animal possível só possui a origem como vértice, havendo uma bijeção entre clusters e vértices. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa(p) - \kappa(0)}{p} &= \frac{\sum_{n,m,b} \left(\frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot p^m \cdot q^b \right) - \sum_{n,m,b} \left(a_{nmb} \cdot p^m \cdot q^b \right)}{p} \\ &= \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 2}} \left[\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \cdot a_{nmb} \cdot p^{m-1} \cdot q^b \right], \end{aligned} \quad (3.41)$$

em que a primeira igualdade se deve à igualdade (3.28), notando que $\frac{1}{n}$ pode sair do somatório à direita por n não depender de m e b , além do fato de termos $\kappa(0) = 1 = \sum_{n,m,b} a_{nmb} \cdot p^m \cdot q^b$. Na segunda igualdade, dividimos ambos os somatórios por p e agrupamo-los, pondo $a_{nmb} \cdot p^m \cdot q^b$ em evidência dentro do novo somatório, além de

notar que se $n = 1$, a expressão se anula. Prosseguindo os cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\kappa(p) - \kappa(0)}{p} &= \sum_{\substack{n,m,b \\ m \geq 2}} \left[\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \cdot a_{nmb} \cdot p^{m-1} \cdot q^b \right] + \sum_{\substack{n,m,b \\ m=1}} \left[\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \cdot a_{nmb} \cdot p^{m-1} \cdot q^b \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \sum_{\substack{m,b \\ m \geq 2}} a_{nmb} \cdot p^{m-1} \cdot q^b \right] + \sum_{\substack{n,m,b \\ m=1}} \left[\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \cdot a_{nmb} \cdot p^{m-1} \cdot q^b \right]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

A primeira igualdade segue de uma partição da última expressão de (3.41), tomada nos possíveis valores para m : como tínhamos $n \geq 2$, pela primeira desigualdade de (3.13), devemos ter $m \geq 1$. A segunda passagem apenas recebeu uma nova arrumação para o primeiro somatório.

Mostremos, seguidamente, que, quando $p \rightarrow 0$,

$$A(p) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \sum_{\substack{m,b \\ m \geq 2}} a_{nmb} \cdot p^{m-1} \cdot q^b \longrightarrow 0. \quad (3.43)$$

Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} |A(p)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \sum_{\substack{m,b \\ m \geq 2}} a_{nmb} \cdot p^{m-1} \cdot q^b \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \sum_{\substack{m,b \\ m \geq 2}} a_{nmb} \cdot p^{m-1} \cdot q^b \right| \\ &= \left| \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \sum_{\substack{m,b \\ m \geq 2}} a_{nmb} \cdot p^{m-1} \cdot q^b \right| + \left| -\frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{m,b \\ m \geq 2}} a_{2mb} \cdot p^{m-1} \cdot q^b \right| \\ &= \left| \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \sum_{\substack{m,b \\ m \geq 2}} a_{nmb} \cdot p^{m-1} \cdot q^b \right|, \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde a primeira igualdade é apenas resultado da definição de $A(p)$, e a segunda segue do fato de a expressão se anular para $n = 1$. Na penúltima igualdade, apenas particionamos o primeiro somatório nos casos em que $n = 2$ e que $n \geq 2$, enquanto que a igualdade derradeira segue da seguinte constatação: todo animal com dois vértices possui exatamente um elo, fazendo com que $a_{2mb} = 0$, para $m \geq 2$. Prosseguindo os cálculos de (3.44), obtém-se, ao notar que $q^b \leq 1$, para qualquer b natural,

a primeira desigualdade de

$$\begin{aligned}
|A(p)| &\leq \sum_{n=3}^{\infty} \left| \frac{1}{n} - 1 \right| \left| \sum_{\substack{m,b \\ m \geq 2}} a_{nmb} \cdot p^{m-1} \right| \leq \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{\substack{m,b \\ m \geq 2}} a_{nmb} \cdot p^{m-1} \\
&\leq \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{\substack{m,b \\ m \geq 2}} a_{nmb} \cdot p^{n-2} = \sum_{n=3}^{\infty} \left[p^{n-2} \cdot \sum_{\substack{m,b \\ m \geq 2}} a_{nmb} \right] \\
&\leq \sum_{n=3}^{\infty} (p^{n-2} \cdot 7^{dn}) = \frac{p \cdot 7^{3d}}{1 - p \cdot 7^d},
\end{aligned} \tag{3.45}$$

quando p é suficientemente pequeno, mais precisamente, $p < \frac{1}{7^d}$. A segunda inequação segue dos fatos de que $\left| \frac{1}{n} - 1 \right| < 1$, para todo n natural, e de que $a_{nmb} \cdot p^{m-1} \geq 0$. A terceira desigualdade segue da primeira desigualdade de (3.13), isto é, se $n - 1 \leq m$, então $n - 2 \leq m - 1$, atentando ao fato de que por $p \in [0, 1]$, a sua potência será tão menor quanto maior for seu expoente. A primeira igualdade advém da independência de p e n em relação às variáveis m e b , enquanto que a última desigualdade segue da Afirmação 3.3, notando, às claras, que $\sum_{\substack{m,b \\ m \geq 2}} a_{nmb} \leq \sum_{m,b} a_{nmb}$. A

última igualdade é apenas válida para $p < \frac{1}{7^d}$, já que os termos do último somatório formam uma progressão geométrica de razão $p \cdot 7^d$; esta restrição pode ser utilizada, pois estamos tomando $p \rightarrow 0$.

Por (3.45), temos que $|A(p)| \rightarrow 0$, quando $p \rightarrow 0$, ratificando (3.43).

Por (3.42) e (3.43), temos, para $p \rightarrow 0$, que

$$\frac{\kappa(p) - \kappa(0)}{p} = \sum_{\substack{n,m,b \\ m=1}} \left[\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \cdot a_{nmb} \cdot p^{m-1} \cdot q^b \right]. \tag{3.46}$$

No entanto, observa-se que existem apenas $2d$ animais que possuem somente um elo, e cada um deles irá conter exatamente dois vértices e $2(2d-1)$ elos na fronteira. Logo, substituiremos $m = 1$, $n = 2$, $b = 2(2d-1)$ e $a_{nmb} = 2d$ em (3.46), obtendo

$$\frac{\kappa(p) - \kappa(0)}{p} = -\frac{1}{2} \cdot 2d \cdot p^0 \cdot q^{2(2d-1)} \rightarrow -d, \tag{3.47}$$

quando $p \rightarrow 0$, e, conseqüentemente, $q \rightarrow 1$. Por (3.47), temos que

$$\kappa'(0) = -d. \tag{3.48}$$

Observação 3.6. Aqui, fazemos uma divagação heurística acerca do fato da deri-

vada de $\kappa(p)$ ter uma feição conhecida, mas não-trivial, que aguça a curiosidade. Não pretende-se ter rigor matemático nestes argumentos, são apenas asserções intuitivas.

Notemos que, em \mathbb{L}^d , cada vértice possui $2d$ elos contíguos. Logo, como cada elo compartilha dois vértices, há, por contagem dupla, uma bijeção entre cada vértice e um conjunto de d elos. Para tornar mais palpável, podemos, por exemplo, associar o vértice $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ ao conjunto de d elos que o une a cada um dos d vértices seguintes: $(x_1 + 1, x_2, \dots, x_d), (x_1, x_2 + 1, \dots, x_d), \dots, (x_1, x_2, \dots, x_d + 1)$.

Para p muito pequeno, imagina-se que a quantidade de elos abertos adjacentes se exaure. Assim, para cada região de \mathbb{L}^d com $\frac{1}{p}$ (assumamos que, $p^{-1} \approx \lceil p^{-1} \rceil$, por aproximação) elos, devemos ter, em média, apenas um elo aberto. Como há bijeção de um vértice para cada conjunto de d elos, tais regiões possuem, cada, $\frac{1}{dp}$ vértices, e $\frac{1}{dp} - 1$ clusters, pois cada vértice é um cluster, exceto os que formam a extremidade do único elo aberto da região.

Temos, desta forma, que para p suficientemente próximo de zero,

$$\kappa(p) \approx \frac{\frac{1}{dp} - 1}{\frac{1}{dp}} = \frac{1-dp}{\frac{1}{dp}} = 1 - dp.$$

Sequindo isto, para p pequeno, teríamos $\kappa'(p) = -d$. Pela suposta continuidade de $\kappa'(p)$, que será comprovada doravante, imagina-se que $\kappa'(0) = -d$, como de fato o é.

Voltando da digressão, devemos agora mostrar que $\kappa'(p)$ é contínua em 0, ou seja, demonstrar que, quando $p \rightarrow 0$, $\kappa'(p) \rightarrow -d$. Notando que $\frac{1}{n}$ pode passar para dentro do segundo somatório em (3.39), isto significa que nossa meta se resume a provar que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \sum_{n,m,b} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot (mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) = -d. \quad (3.49)$$

De fato, particionando o somatório nos casos em que $n = 1$, $n = 2$ e $n \geq 3$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{n,m,b} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} (mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) &= \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{\substack{n,m,b \\ n=1}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} (mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) \\ &+ \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{\substack{n,m,b \\ n=2}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} (mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) + \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} (mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Notemos que se $n = 1$, o animal não possui nenhum elo, e tem apenas a origem como vértice. Daí, segue que $m = 0$, $b = 2d$ e $a_{nmb} = 1$. Logo, substituindo

tais valores no primeiro limite após a igualdade, em (3.50), vem

$$\lim_{p \rightarrow 0} \sum_{\substack{n,m,b \\ n=1}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} (mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) = -2d, \quad (3.51)$$

atentando para o fato de que $q \rightarrow 1$ quando $p \rightarrow 0$.

Agora, se $n = 2$, o animal possui exatamente um elo, que pode ser escolhido de $2d$ maneiras possíveis, tendo cada vértice $2d - 1$ elos na fronteira, de modo que nenhum elo fronteiro é adjacente a ambos os vértices do animal. Ou seja, $m = 1$, $b = 2(2d - 1)$ e $a_{nmb} = 2d$. Assim, pondo tais valores no segundo limite após a igualdade, em (3.50), segue que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \sum_{\substack{n,m,b \\ n=2}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} (mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) = d. \quad (3.52)$$

Com isso, por (3.50), (3.51) e (3.52), já temos que

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{n,m,b} \frac{1}{n} a_{nmb} (mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) &= -d + \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} a_{nmb} (mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) \\ &= -d + \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} a_{nmb} mp^{m-1}q^b - \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} a_{nmb} bp^mq^{b-1}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ao provar em seguida, através de duas afirmações, que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot mp^{m-1}q^b = 0$$

e

$$\lim_{p \rightarrow 0} \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot bp^mq^{b-1} = 0,$$

obteremos o desejado em (3.49).

Afirmção 3.6.

$$\lim_{p \rightarrow 0} \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot mp^{m-1}q^b = 0.$$

Com efeito, inferimos que

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot mp^{m-1} q^b \right| &\leq \left| \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot dn \cdot p^{n-2} q^b \right| \leq \left| \sum_{n=3}^{\infty} \left(dn p^{n-2} \sum_{m,b} a_{nmb} \right) \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=3}^{\infty} dn p^{n-2} \cdot 7^{dn} \right| = \left| \frac{d}{p^2} \sum_{n=3}^{\infty} n p^n \cdot 7^{dn} \right| \\
&= \left| \frac{d}{p^2} \sum_{n=3}^{\infty} n (7^d p)^n \right| \\
&= \left| \frac{d}{p^2} \left(\frac{7^d p}{(1 - 7^d p)^2} - 7^d p - 2(7^d p)^2 \right) \right|.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

A primeira desigualdade de (3.54) é justificada pelas duas inequações de (3.13) unidas ao fato de $p \in (0, 1)$, além de termos, para todo n natural, $\left| \frac{1}{n} \right| \leq 1$. A desigualdade seguinte segue de $|q^b| \leq 1$, associado a d , n e p independentemente de m e b , permitindo que os termos que dependam unicamente das primeiras variáveis possam sair do segundo somatório. A terceira inequação é imediata da Afirmação 3.3. Por $p \in (0, 1)$, a primeira igualdade fica clara, enquanto que a segunda igualdade é imediata. A última desigualdade se deve à manipulação de séries de potências, e será explicada na Afirmação 3.7 a seguir:

Afirmação 3.7. *Para $p > 0$ suficientemente pequeno, vale a igualdade*

$$\sum_{n=3}^{\infty} n (7^d p)^n = \left(\frac{7^d p}{(1 - 7^d p)^2} - 7^d p - 2(7^d p)^2 \right).$$

Demonstração. Sabe-se, do estudo de séries de potências, que se $0 < \alpha < 1$, então

$$\frac{1}{1 - \alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n,$$

e, por derivação com respeito a α , depreende-se que

$$\frac{1}{(1 - \alpha)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot \alpha^{n-1}) = \frac{1}{\alpha} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot \alpha^n), \tag{3.55}$$

em que a segunda passagem segue do fato de α independe de n , e não se anular, por hipótese. Por (3.55), conclui-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot \alpha^n) = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2} \Rightarrow \alpha + 2\alpha^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n \cdot \alpha^n) = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2},$$

ou seja,

$$\sum_{n=3}^{\infty} (n \cdot \alpha^n) = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} - \alpha - 2\alpha^2. \quad (3.56)$$

Tomando $0 < p < \frac{1}{7^d}$, temos, ao definirmos $\alpha := 7^d p$, que $0 < \alpha = 7^d p < 1$, como queremos, em que d é claramente fixado. Substituindo $\alpha = 7^d p$ em (3.56), segue que

$$\sum_{n=3}^{\infty} n(7^d p)^n = \left(\frac{7^d p}{(1-7^d p)^2} - 7^d p - 2(7^d p)^2 \right),$$

que é exatamente o que intentávamos. \square

Continuando o que foi desenvolvido em (3.54), através apenas de cálculos elementares, segue que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot m p^{m-1} q^b \right| \leq \left| \frac{d}{p^2} \left(\frac{7^d p - 7^d p(1-7^d p)^2 - 2(7^d p)^2 \cdot (1-7^d p)^2}{(1-7^d p)^2} \right) \right| \\ &= \left| \frac{d}{p^2} \left(\frac{7^d p - 7^d p(1-2 \cdot 7^d p + 49^d p^2) - 2 \cdot 49^d p^2 \cdot (1-2 \cdot 7^d p + 49^d p^2)}{(1-7^d p)^2} \right) \right| \\ &= \left| \frac{d}{p^2} \left(\frac{-343^d p^3 + 4 \cdot 343^d p^3 - 2 \cdot 2401^d p^4}{(1-7^d p)^2} \right) \right| \\ &= \left| \frac{dp \cdot (3 \cdot 343^d - 2 \cdot 2401^d p)}{(1-7^d p)^2} \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $p \rightarrow 0$, já que por d ser fixado, o numerador da última razão converge a zero, e o denominador converge a 1. Com isso, finda a justificativa para a Afirmação 3.6. Falta, por fim, provar o seguinte resultado:

Afirmação 3.8.

$$\lim_{p \rightarrow 0} \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot b p^m q^{b-1} = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot bp^m q^{b-1} \right| &\leq \left| \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m,b} a_{nmb} \cdot 2dn \cdot p^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=3}^{\infty} \left(2dn \cdot p^{n-1} \cdot \sum_{m,b} a_{nmb} \right) \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=3}^{\infty} 2dn \cdot p^{n-1} \cdot 7^{dn} \right| = \left| \frac{2d}{p} \cdot \sum_{n=3}^{\infty} np^n \cdot 7^{dn} \right| \\
&= \left| \frac{2d}{p} \cdot \left(\frac{-343^d p^3 + 4 \cdot 343^d p^3 - 2 \cdot 2401^d p^4}{(1 - 7^d p)^2} \right) \right| \\
&= \left| \frac{2dp^2 \cdot (3 \cdot 343^d - 2 \cdot 2401^d p)}{(1 - 7^d p)^2} \right| \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $p \rightarrow 0$. Na primeira desigualdade, usamos a segunda desigualdade de (3.12) e os fatos de que $\left| \frac{1}{n} \right| \leq 1$, para todo n natural, e $|q^{b-1}| \leq 1$, já que $q \in (0, 1)$. A primeira igualdade segue de d , n e p serem variáveis que independem de m e b . A última inequação vem da Afirmação 3.3, enquanto que a igualdade seguinte é devida às variáveis d e p independerm de n . A penúltima igualdade vem dos análogos resultados obtidos na Afirmação 3.6; já a última igualdade é imediata. A convergência é clara, já que o numerador converge a 0, e o denominador converge a 1, já que d é fixo. Desta forma, temos provado a Afirmação 3.8.

Ao substituir o conseguido nas Afirmações 3.6 e 3.8 em (3.53), obtemos

$$\lim_{p \rightarrow 0} \sum_{n,m,b} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot (mp^{m-1} q^b - bp^m q^{b-1}) = -d = \kappa'(0),$$

como queríamos. Logo, conclui-se que $\kappa'(p)$ é contínua em 0, ou seja, $\kappa(p)$ é continuamente diferenciável em zero, ratificando a validade da Afirmação 3.5. Como havíamos, de início, comprovado a diferenciabilidade contínua de $\kappa(p)$ em $(0, 1)$, garantimos, agora, a diferenciabilidade contínua de $\kappa(p)$ em $[0, 1)$, completando a prova do Teorema 3.3. \square

Observação 3.7. *Para a demonstração do Teorema 3.3, seguimos [Grimmett] como norte, assim como em quase todo este trabalho. Todavia, o respectivo resultado em tal referência é um pouco mais geral, garantindo, pois, a diferenciabilidade contínua também para $p = 1$. O autor argumenta haver similitude entre esta prova e a da Afirmação 3.5, na qual as principais ferramentas usadas – inclusive por indicação deste – são as desigualdades (3.12), (3.13) e a Afirmação 3.3. Contudo, não foi obtido êxito para isto, e justificaremos na seção seguinte quais as principais dificuldades encontradas neste trabalho.*

3.4 Há diferenciabilidade contínua de $\kappa(p)$ para $p = 1$?

Como sabemos pelo Teorema 3.5, a resposta para a pergunta desta seção é afirmativa. Porém, as desigualdades (3.12), (3.13) e a Afirmação 3.3 não parecem ser eficazes para obtermos a resposta para tal pergunta.

Não obstante o labor imposto, não foi conseguido tal prova utilizando somente tais meios. Ou seja, não foi possível mostrar que

$$\lim_{p \rightarrow 1} \left| \frac{\kappa(p) - \kappa(1)}{p - 1} \right| = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{n,m,b} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} (mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) \quad (3.57)$$

sem lançar mão do Teorema 3.5, o qual não demonstramos, e que tornaria ínfimo nosso trabalho, caso não o demonstrássemos. Exporemos, em consequente, quais as dificuldades e por que elas se sucederam ao tentarmos ratificar a veracidade de (3.57).

Ao calcularmos

$$\lim_{p \rightarrow 1} \left| \frac{\kappa(p) - \kappa(1)}{p - 1} \right|,$$

nos deparamos com

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 1} \left| \frac{\kappa(p) - \kappa(1)}{p - 1} \right| &= \lim_{p \rightarrow 1} \left| \frac{\kappa(p)}{p - 1} \right| = \lim_{p \rightarrow 1} \left| \frac{\sum_{n,m,b} \left(\frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot p^mq^b \right)}{-q} \right| \\ &= \lim_{p \rightarrow 1} \left| - \sum_{n,m,b} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot p^mq^{b-1} \right| \leq \lim_{p \rightarrow 1} \left| \sum_{n,m,b} a_{nmb} \cdot q^{b-1} \right|. \end{aligned} \quad (3.58)$$

A primeira igualdade segue do fato de $\kappa(1) = 0$. A segunda igualdade vem de (3.28) e da constatação de que $p - 1 = -q$, enquanto que a igualdade seguinte é imediata. Retirando o sinal de subtração, por estarmos operando dentro de um módulo, notando que $\frac{1}{n} \leq 1$ para n natural e $p^m \leq 1$, para quaisquer p e m , obtemos a desigualdade de (3.58).

Ademais, ao calcularmos $\lim_{p \rightarrow 1} \sum_{n,m,b} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot (mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1})$, encontramos dificuldades similares. Por artifícios semelhantes aos que fizemos para $p = 0$, te-

mos, particionando os somatórios nos casos em que $n = 1$, $n = 2$ e $n \geq 3$, que

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{\substack{n,m,b \\ n=1}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb}(mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) &= \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{\substack{n,m,b \\ n=1}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb}(mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) \\ + \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{\substack{n,m,b \\ n=2}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb}(mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) &+ \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb}(mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Por argumentos análogos ao que foi feito no caso $p = 0$, temos que se $n = 1$, então $m = 0$, $b = 2d$ e $a_{nmb} = 1$. Ademais, se $n = 2$, segue que $m = 1$, $b = 2d(2d - 1)$ e $a_{nmb} = 2d$. Substituindo tais constantes nos dois primeiros somandos do lado direito da igualdade (3.59), vem

$$\lim_{p \rightarrow 1} \sum_{\substack{n,m,b \\ n=1}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb}(mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) = 0,$$

e

$$\lim_{p \rightarrow 1} \sum_{\substack{n,m,b \\ n=2}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb}(mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) = 0.$$

Desta maneira, nosso trabalho se restringe a encontrar

$$\lim_{p \rightarrow 1} \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb}(mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}).$$

Separando o limite acima como soma de dois limites, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb}(mp^{m-1}q^b - bp^mq^{b-1}) &= \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot (mp^{m-1}q^b) \\ &- \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot (bp^mq^{b-1}). \end{aligned}$$

Notemos, respectivamente, para ambas as seguintes expressões, por $|p^k| \leq 1$ para

quaisquer $p \in [0, 1]$ e $k \in \mathbb{N}$, $b \leq 2dn$ e $m \leq dn$, consoante (3.12) e (3.13), que,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot (mp^{m-1}q^b) \right| &\leq \left| \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot (mq^b) \right| \leq \left| \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot (dnq^b) \right| \\ &= d \left| \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} a_{nmb} \cdot q^b \right|, \end{aligned} \quad (3.60)$$

e

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot (bp^m q^{b-1}) \right| &\leq \left| \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot (bq^{b-1}) \right| \leq \left| \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} \frac{1}{n} \cdot a_{nmb} \cdot (2dnq^{b-1}) \right| \\ &= 2d \left| \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} a_{nmb} \cdot q^{b-1} \right|. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Neste instante, precisamos de uma cota inferior para b em função de n , com o intuito de usar a Afirmação 3.3. Por argumentos combinatórios, temos que $b \geq dn - \frac{n(n-1)}{4}$; uma cota ineficiente, já que se $n \geq 4d + 1$, incorremos na trivial desigualdade $b \geq 0$.

Por desigualdade isoperimétrica em grafos, tem-se uma cota bastante melhor:

$$b \geq 2dn \frac{d-1}{d}. \quad (3.62)$$

Para uma explanação mais aprofundada deste fato, ver [Tillich]. Ainda com (3.62), temos que

$$d \left| \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} a_{nmb} \cdot q^b \right| \leq d \left| \sum_{n=3}^{\infty} q^{2dn \frac{d-1}{d}} \cdot \sum_{m,b} a_{nmb} \right| \leq d \left| \sum_{n=3}^{\infty} q^{2dn \frac{d-1}{d}} \cdot 7^{dn} \right|,$$

que não converge a zero quando q converge a zero, como almejávamos. De maneira análoga,

$$2d \left| \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} a_{nmb} \cdot q^{b-1} \right| = \frac{2d}{q} \left| \sum_{\substack{n,m,b \\ n \geq 3}} a_{nmb} \cdot q^b \right|,$$

que não converge a zero quando $q \rightarrow 0$, conforme vimos acima. Desfecha-se, desta forma, uma mostra de que os argumentos usados para mostrar a diferenciabilidade contínua de $\kappa(p)$ em $p = 0$ não se mostram tão eficazes quando passamos a aplicá-

los para $p = 1$.

3.5 Um resultado geral

Como frisamos no início deste capítulo, existem resultados bastante gerais para a diferenciabilidade contínua de $\kappa(p)$, no que tange ao modelo do grafo em questão. Por exemplo, em [AKN], artigo escrito por Aizenman-Kesten-Newman, encontra-se o seguinte resultado:

Teorema 3.6. $\kappa(p)$ é continuamente diferenciável em $p \in (0, 1)$, para qualquer grafo invariante por translação.

Ao tomarmos grafos quaisquer invariantes por translação, estamos abrangendo bastante nossa gama de grafos estudados. Podemos tomar, por exemplo, grafos que não são hipercúbicos, como as redes triangular ou hexagonal, e até grafos que não seguem necessariamente a regra de haver elos apenas entre vértices vizinhos. Inclusive, incluem-se neste conjunto os multigrafos, que permitem a ocorrência de mais de um elo entre dois vértices, desde que seja preservada a invariância por translação.

Note que em um grafo completo (qualquer par de vértices possui um elo os unindo) invariante por translação que seja infinito, tem-se $\kappa(0) = 1$. Pelo Lema de Borel-Cantelli, notando que as escolhas dos estados dos elos são independentes entre si, tem-se também $\kappa(p) = 0$, para qualquer $p \in (0, 1]$, exibindo, neste caso, um exemplo em que $\kappa(p)$ sequer é contínua em $p = 0$. Abaixo, enunciaremos o Lema de Borel-Cantelli, cuja prova pode ser encontrada em [James], e de cuja segunda parte utilizamos no argumento acima.

Teorema 3.7. (Lema de Borel-Cantelli) Sejam A_1, A_2, \dots eventos aleatórios em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, isto é, $A_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, então $\mathbb{P}(A_n \text{ infinitas vezes})=0$;

ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ e os A_n são independentes, então $\mathbb{P}(A_n \text{ infinitas vezes})=1$.

Mostramos acima que até mesmo a continuidade de $\kappa(p)$ em $p = 0$ não vale, em geral, para qualquer grafo invariante por translação. Contudo, veremos abaixo que a continuidade de $\kappa(p)$ em $p = 1$ é garantida para grafos infinitos enumeráveis, com estados dos elos independentemente escolhidos com parâmetro p .

Afirmção 3.9. Seja $G = (V, E)$ um grafo infinito e enumerável, em que V e E indicam os conjuntos de vértices e elos de G , respectivamente. Se os estados dos

elos de E são independentes entre si, e seguem, para todo $e \in E$, $\omega_{e,p} = \mathbb{1}_{[U_e \leq p]}$, com $U_e \sim U[0, 1]$, então $\kappa(p)$ é contínua para $p = 1$. Seguindo as definições do início deste trabalho, $\omega_{e,p}$ indica o estado do elo e , em que o parâmetro é p , valendo 1 para o elo aberto e 0, caso contrário.

De fato, para cada $e \in E$, temos que $\lim_{p \rightarrow 1} \omega_{e,p} = 1$. Denotando por $|C(p_j)|$ o tamanho do cluster que contém a origem quando tem-se probabilidade p_j de cada elo estar aberto, temos que, para $0 \leq p < p_0 \leq 1$ e $p \nearrow p_0$,

$$\frac{1}{|C(p)|} \searrow \frac{1}{|C(p_0)|} \quad \text{q.c.},$$

já que cada elo tem seu estado independente dos estados dos outros elos, o cluster que contém a origem possui quantidade de vértices crescente em função de p , e o grafo é enumerável, implicando que $U_e \neq U_f$ quase-certamente para e e f elos distintos de E . Como $|C(1)| = +\infty$, já que, por hipótese o grafo é infinito, temos que, quando $p \nearrow 1$,

$$\frac{1}{|C(p)|} \searrow \frac{1}{|C(1)|} = 0 \quad \text{q.c.},$$

ou seja, pela própria definição de $\kappa(p)$, $\lim_{p \rightarrow 1} \kappa(p) = 0$, mostrando a continuidade de $\kappa(p)$ para $p = 1$.

Observação 3.8. O artigo [AKN] demonstra também, como consequência da diferenciabilidade contínua de $\kappa(p)$, a unicidade do cluster infinito na fase supercrítica. A prova está fortemente atrelada à análise da derivada de $\kappa(p)$. Ademais, os autores salientam que a função $\kappa(p)$ é a análoga do energia livre no modelo de Ising. Dois anos após o artigo, [Burton-Keane] apresenta uma prova deste fato, que se tornou mais conhecida que a supracitada, muito provavelmente em decorrência de sua simplicidade e elegância. Apesar de termos estudado a demonstração dada em [AKN], não a colocaremos neste trabalho, a fim de evitarmos deixar o texto muito longo e cansativo.

Capítulo 4

Perspectivas Futuras

Temos, como objetivo para trabalhos futuros, continuar o estudo em Percolação, mas agora também em outras modalidades, como por exemplo a Percolação Anisotrópica, que abriga alguns problemas em aberto. Este é um viés que engloba modelos não-homogêneos, declarando abertura e fechamento de elos em função parâmetros que dependem da direção dos elos na rede.

Referências Bibliográficas

- [AKN] Aizenman, M., Kesten, H., Newman, C.M., *Uniqueness of the Infinite Cluster and Continuity of Connectivity Functions for Short and Long Range Percolation*, Commun. Math. Phys. **111**, 505-531, (1987).
- [BH] Broadbent, S.R., Hammersley, J.M., *Percolation processes I. Crystals and mazes*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **53**, 629-641, (1957).
- [Burton-Keane] Burton, R.M., Keane, M., *Density and Uniqueness in Percolation*, Communications in Mathematical Physics **121**, 501-505, (1989).
- [DS] Dunford, N., Schwartz, J.T., *Linear Operators*, Volume 1, Wiley-Interscience, (1958).
- [Durrett] Durrett, R., *Probability: Theory and Examples*, Thomson-Brooks/Cole, (2005).
- [Elon] Lima, E.L., *Curso de Análise*, Volume 1, IMPA, (2000).
- [Fontes] Fontes, L.R.G., *Notas em Percolação*, Monografias de Matemática **54**, IMPA/CNPq, (1996).
- [Grimmett] Grimmett, G.R., *Percolation*, Springer, (1999).
- [James] James, B.R., *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*, IMPA, (1996).
- [Kesten(1980)] Kesten, H., *The Critical Probability of Bond Percolation on the Square Lattice Equals $\frac{1}{2}$* , Communications in Mathematical Physics **74**, 41-59, (1980).
- [Kesten(1982)] Kesten, H., *Percolation Theory for Mathematicians*, Birkhäuser, Boston, (1982).
- [Kesten(1990)] Kesten, H., *Asymptotics in High Dimensions for Percolation*, Disorder in Physical Systems, Clarendon Press, (1982).

- [Menshikov] Menshikov, M.V., *Coincidence of Critical Points in Percolation Problems*, Soviet Mathematics Doklady **33**, 856-859, (1986).
- [Peierls] Peierls, R., *On Ising's model of ferromagnetism*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **36**, 477-481, (1936).
- [Tillich] Tillich, J-P., *Edge isoperimetric inequalities for product graphs*, Discrete Mathematics **213**, 291-320, (2000).
- [Wierman] Wierman, J.C., *Bond Percolation on Honeycomb and Triangular Lattices*, Advances in Applied Probability **13**, 293-313, (1981).

Índice Remissivo

- $\chi(p)$, 19
- $\kappa(p)$, 2, 20
- $\lambda(n)$, 16
- \mathcal{A}_{nmb} , 48
- $\psi(p)$, 17
- $\sigma(k)$, 13
- $\theta(p)$, 2, 9
- a_{nmb} , 48

- acoplamento, 7, 10, 25, 37
- Aizenman-Barsky, 20
- Aizenman-Kesten-Newman, 1, 3, 73
- animal, 47
- argumento de Peierls, 14

- Broadbent e Hammersley, 1, 12
- Burton-Keane, 3, 74

- caixa $B(n)$, 8
- caminho, 7
- circuito, 7
- cluster, 8
- configurações, 6
- contagem dupla, 49

- Desigualdade de BK, 2, 33
- Desigualdade de Cauchy-Schwarz, 31
- Desigualdade de FKG, 2, 26
- Desigualdade de Harris-FKG, 26
- desigualdade isoperimétrica, 72
- diferenciabilidade contínua de $\kappa(p)$, 3, 57
- distância, 4
- distância sob a norma do máximo, 5
- distribuição de Bernoulli, 6, 10

- elo p -aberto, 7
- elo p -fechado, 7
- elo correspondente, 15
- elo essencial, 38
- elo pivotal, 35
- elos de fronteira, 48
- evento caudal, 17
- evento crescente, 24
- evento decrescente, 24

- Fórmula de Russo, 2, 36
- Fórmula de Taylor infinitesimal, 76
- fase subcrítica, 11, 12
- fase supercrítica, 11, 12
- Fortuin, Kasteleyn e Ginibre, 26
- fronteira de $B(n)$, 45
- função indicadora, 24

- grafo \mathbb{L}^d , 5
- grafo dual, 14

- Hara e Slade, 2
- Harris, 2

- Kesten, 1, 2, 15, 23, 57

- Lei 0-1 de Kolmogorov, 17
- Lema de Borel-Cantelli, 73

- martingal, 30
- Menshikov, 1
- modelo de Ising, 14, 74
- monotonicidade de θ , 10
- multigrafo, 33

- ocorrência disjunta de eventos, 32

ordem parcial para configurações, 7

percolação de longo alcance, 20

ponto crítico, 11

Princípio da Inclusão-Exclusão, 32

probabilidade condicional, 26, 41

regra de L'Hospital, 38

Reimer, 33

submartingal, 30

Teorema da Convergência de Martingais,
30

Teorema da Convergência Dominada, 31,
47

Teorema da Curva de Jordan, 15

Teorema de Tonelli-Fubini, 37

Teorema Ergódico, 41, 44

transição de fase, 12

van der Berg e Kesten, 33

variáveis aleatórias cilíndricas, 27

variável aleatória crescente, 24

variável aleatória decrescente, 24

vizinhos mais próximos, 5

Wierman, 23

Universidade Federal da Bahia-UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus de Ondina, Salvador-BA
CEP: 40170 -110
www.pgmat.ufba.br