

Análise no \mathbb{R}^n MAT 508

Prova I

Data: 12/09/2012

Prof. Tertuliano

1. **[2pt]** Mostre que, se $c \in [a, b]$, então $|b - a| = |b - c| + |c - a|$. Se a norma provém de um produto interno, mostre que vale a recíproca. Dê um exemplo (com alguma norma) onde vale a igualdade $|b - a| = |b - c| + |c - a|$ com $c \notin [a, b]$.
2. **[2pt]** Seja $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicação linear injetiva. Prove que existe $c > 0$ tal que $|Ax| > c|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0$.
3. **[2pt]** Mostre que se um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ contém pontos do fecho de $X \subset \mathbb{R}^n$, então A contém pontos de X .
4. **[2pt]** Mostre que um conjunto conexo enumerável contém no máximo um ponto.
5. **[2pt]** Mostre que todo conjunto fechado enumerável contém algum ponto isolado.

Extra: **[1pt]** Na Questão 3, caracterize as possíveis cardinalidades de $A \cap X$.

Extra: **[0.5pt]** Na Questão 5, mostre que a condição *fechado* é necessária.