Universidade Federal da Bahia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Teoria Espectral (MATD19) – 2015.1

Segunda Avaliação Escrita

Prof. Dr. Tertuliano Franco

http://w3.impa.br/∼tertu/

Questão 1. (a) Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Use integração por partes para mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = -2 \int_{\mathbb{R}} x \cdot \mathrm{Re}\Big(f(x) \cdot \overline{f'(x)}\Big) \, \mathrm{d}x.$$

(b) Use o resultado anterior para provar *Princípio da Incerteza*:

$$\|f\|_2^2 \leq 2 \cdot \|x \cdot f(x)\|_2 \cdot \|\lambda \cdot \widehat{f}(\lambda)\|_2, \quad \forall\, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Solução:

(a) Se $u = |f(x)|^2 = f(x) \cdot \overline{f(x)}$ e $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, então $v = x$ e

$$\mathrm{d}u = (f'(x) \cdot \overline{f(x)} + f(x) \cdot \overline{f'(x)}) \, \mathrm{d}x = (\overline{\overline{f'(x)} \cdot f(x)} + f(x) \cdot \overline{f'(x)}) \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \mathrm{Re}(f(x) \cdot \overline{f'(x)}) \, \mathrm{d}x.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \underbrace{x \cdot f(x) \cdot \overline{f(x)}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0\ (*)} - 2 \int_{\mathbb{R}} x \cdot \mathrm{Re}(f(x) \cdot \overline{f'(x)}) \, \mathrm{d}x = -2 \int_{\mathbb{R}} x \cdot \mathrm{Re}(f(x) \cdot \overline{f'(x)}) \, \mathrm{d}x.$$

$(*)$: Pois $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(b)

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \quad &\leq \quad 2 \int_{\mathbb{R}} \Big| x \cdot \mathrm{Re}\Big(f(x) \cdot \overline{f'(x)}\Big) \Big| \, \mathrm{d}x \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x \cdot f(x)| \cdot |f'(x)| \, \mathrm{d}x \\
&\overset{(1)}{=} \quad 2\|xf(x)\|_2 \cdot \|f'(x)\|_2 \overset{(2)}{=} 2\|xf(x)\|_2 \cdot \|\widehat{f'(x)}\|_2 \\
&\overset{(3)}{=} \quad 2\|xf(x)\|_2 \cdot \|i\lambda \widehat{f}(\lambda)\|_2 = 2\|xf(x)\|_2 \cdot \|\lambda \widehat{f}(\lambda)\|_2.
\end{aligned}$$

Em que: (1) Holder; (2) Plancherel, $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$; (3) $\widehat{D^\alpha f} = (i\lambda)^\alpha \widehat{f}$. ◁

Questão 2. Nesta questão, $x, \lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Assuma que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$. Mostre que $\widehat{e^{-x^2/2}} = e^{-\lambda^2/2}$.

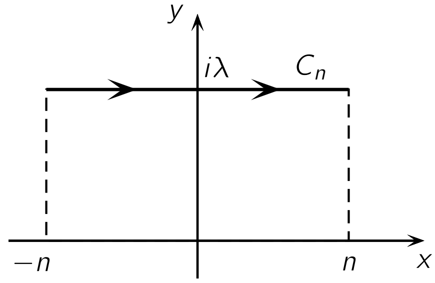
(b) Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $a > 0$. Se $g(x) = f(ax)$, mostre que $\widehat{g}(\lambda) = \frac{1}{a}\widehat{f}(\lambda/a)$.

(c) Para $t > 0$, calcule $\widehat{e^{-tx^2/2}}$.

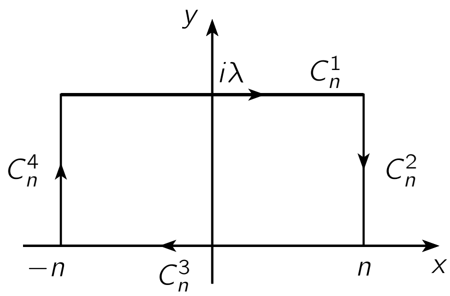
Solução:

(a) $\mathcal{F}[e^{-x^2/2}](\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\lambda} \cdot e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+2i\lambda x-\lambda^2)/2} \cdot e^{-\lambda^2/2}\,\mathrm{d}x$. Se $z = x + i\lambda$, então:

$$\mathcal{F}[e^{-x^2/2}](\lambda) = \frac{e^{-\lambda^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \lim_{n\to+\infty}\int_{C_n} e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z$$



Como $e^{-z^2/2}$ é holomorfa, segue que $\displaystyle\int_{\gamma} e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z = 0$, em que $\gamma = C_n^1 \cup C_n^2 \cup C_n^3 \cup C_n^4$, como na figura ao lado.



O fato da vida que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$, nos dá que $\displaystyle\int_{C_n^3} e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z = -\sqrt{2\pi}$, com $n \to +\infty$. Assim, temos:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{C_n^1} e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z = \sqrt{2\pi}.$$

Portanto, $\mathcal{F}[e^{-x^2/2}](\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = e^{-\lambda^2/2}$, como desejado.

(b) $\widehat{g}(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ixf(ax)}\,\mathrm{d}x \overset{y=ax}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-iy\lambda/a} f(y)\dfrac{\mathrm{d}y}{a} = \dfrac{1}{a}\widehat{f}(\lambda/a)$.

(c) $\mathcal{F}\left[e^{-tx^2}\right] = \mathcal{F}\left[e^{-(\sqrt{2t}\ x)^2/2}\right] \overset{(a)(b)}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2t}} e^{-(\lambda/\sqrt{2t})^2/2} = \dfrac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\lambda^2/4t}$.

◁

Questão 3. Assuma que $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Usando a transformada de Fourier, resolva a *Equação do Calor* na reta:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) &= \partial_x^2 u(t,x) &, \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) &= u_0(x) &, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Obs. a resposta final não deve envolver a transformada de Fourier.

Solução: Como $\widehat{\partial_t u} = \partial_t \widehat{u}$ e $\widehat{\partial_x^2 u} = -\lambda^2\widehat{u}$, temos que $\partial_t\widehat{u} = -\lambda^2\widehat{u}$. Resolvendo (como em EDO), $\widehat{u}(t,\lambda) = e^{-\lambda^2 t}\widehat{u}_0(\lambda)$. Assi, temos:

$$\begin{aligned} u(t,\lambda) &= \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\lambda^2 t}\widehat{u}_0(\lambda)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\lambda^2 t}\right] * u_0(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overset{Q2}{=} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{2t}} * u_0(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{e^{-x^2/4t}}{2\sqrt{\pi t}} * u_0(x). \end{aligned}$$

◁

Questão 4. A função característica de $\phi_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de uma medida de probabilidade μ nos borelianos de $\mathbb{R}$ é definida por

$$\phi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\mu(\mathrm{d}x).$$

Qual a relação entre a função característica de μ e a transformada de Fourier de μ? Conclua que, se μ_1 e μ_2 são duas medidas de probabilidade com mesma função característica, então $\mu_1 = \mu_2$.

Solução: Como $\widehat{T}(f) = T(\widehat{f})$, temos:

$$\widehat{\mu}(f) = \mu(\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(x)\,\mathrm{d}x\ \mu(\mathrm{d}t) \overset{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixt}}{\sqrt{2\pi}} \mu(\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\phi_\mu(-x)}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x.$$

Assim, $\widehat{\mu} = T_g$, em que $g(t) = \dfrac{\phi_\mu(-t)}{\sqrt{2\pi}}$. Como a transformada é única, concluímos que μ é única. $\triangleleft$

Texto composto em $\LaTeX\,2_\varepsilon$, Cattai, 6 de maio de 2015