1) # GABARITO

$$|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$= |x|^2 + 2\langle x,y\rangle + |y|^2$$

$$\leq |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2$$

$$= (|x| + |y|)^2$$

$$\Rightarrow |x+y| = |x| + |y| \iff x \parallel y, \quad \begin{array}{c} x = \alpha y,\ \alpha > 0 \\ \text{ou } y = \alpha x,\ \alpha > 0 \end{array}$$

Ou seja, $|b-c| = |\underbrace{b-a}_{x} + \underbrace{a-c}_{y}| =$

$= |\underbrace{b-a}_{x}| + |\underbrace{a-c}_{y}|$

$\iff x \parallel y \iff b-a \parallel a-c$

2) Suponha que não exista tal $c > 0$. Logo, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in \mathbb{R}^n$, $x_k \neq 0$ tal que

$$|A x_k| \leq \frac{1}{k} |x_k|$$

$$\Rightarrow \left| A \frac{x_k}{|x_k|} \right| \leq \frac{1}{k} \qquad (*)$$

Claramente, $\dfrac{x_k}{|x_k|} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de norma 1.

Logo, por Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência convergente

$$y_{k_j} = \frac{x_{k_j}}{|x_{k_j}|} \longrightarrow y$$

Como a norma é uma função contínua,

$|y_{k_j}| \longrightarrow |y|$. Como $|y_{k_j}| = 1 \Rightarrow$

$|y| = 1$.

Daí, como A é contínua, e por $(*)$

$\lim\limits_{k} |Ay_k| \leq \lim \frac{1}{k} = 0 \Rightarrow Ay = 0$ e

portanto A não é injetiva.

3) Seja $x \in \overline{X}$, $x \in A$. Como A é aberto, x é ponto interior a A. Logo, existe $B(x, \varepsilon) \subseteq A$.

Se $x \in X$, mas $x \notin X'$, então existe $x_k \to x$, $x_k \in X$. Logo, para $k \geq k_0$ existem infinitos pontos de X pertencentes a A.

Extra: Possibilidades: pode ser finito, se A contém pontos de X mas não de X'.

Se A contém um ponto de X', a quantidade será pelo menos enumerável. Pode ser não enumerável

4) Suponha que existam $x, y \in X$, X conexo enumerável. No conjunto de esferas

$$\{ S[x, r] \; ; \; r \in (0, |x-y|) \}$$

apenas para um número enumerável de esferas a interseção com X é não-vazia, caso contrário X seria não enumerável. Logo, existe um $r_0 \in (0, |x-y|)$ tal que

$$S[0, r_0] \cap X = \emptyset$$

Como $X = \left(X \cap B(0, r_0)\right) \cup \left(X \cap B[0, r_0]^c\right)$

é uma cisão não-trivial, X é desconexo, contradição.

5) Seja X fechado enumerável,

$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, sem nenhum ponto

isolado.

Seja V_1 um aberto tal que $x_1 \in V_1$

Seja V_2 outro aberto tal que

- $V_2 \cap X \neq \emptyset$
- $\overline{V_2} \subset V_1$
- $x_1 \notin V_2$

Seja V_3 outro aberto tal que

- $V_3 \cap X \neq \emptyset$
- $V_3 \subset \overline{V_2}$
- $x_2 \notin V_3$

e assim por diante. Sejam

$K_1 = \overline{V_1} \cap X$

$K_2 = \overline{V_2} \cap X$

$\vdots$

Cada K_i é compacto. Além disso,

$K_1 \supset K_2 \supset \dots$ e $K_i \neq \emptyset$.

Logo, $\bigcap_{i=1}^{+\infty} K_i \neq \emptyset$. Mas $K_i \subseteq X$ e como

$x_i \notin V_{i+1}$, então $\bigcap_{i=1}^{+\infty} K_i = \emptyset$, contradição.

Logo X não pode ser enumerável.

<u>Extra:</u> $\mathbb{Q}^n$ é enumerável e não tem pontos isolados.