Universidade Federal da Bahia - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Professor: Tertuliano Franco
Aluno: Felipe Fonseca dos Santos

Trabalho do curso de Probabilidade

Este trabalho consiste em resolver algumas questões selecionadas pelo professor Tertuliano, que em sua maioria foram retiradas do livro: "Probabilidade: um curso em nível intermediário", de Barry R. James.

Capítulo 5

14ªQUESTÃO: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ independentes e identicamente distribuídas, com $X_1 \sim U[0,1]$. Ache o limite quase certo da média geométrica

$$\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)^{1/n}$$

(Sugestão. Tome logaritmos.)

Resolução: Como $X_1, X_2, \ldots$ são variáveis aleatórias *i.i.d.*, temos que $Y_1, Y_2, \ldots$, dadas por $Y_i = \log X_i$; $i = 1, 2, \ldots$, também são variáveis aleatórias *i.i.d.*. Assim $\mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E}(Y_1)$ e como

$$\mathbb{E}(Y_1) = \int_0^1 \log x \, dx = \text{(Por partes)} = [x \log x - x]_0^1 = -1$$

temos pela Lei Forte de Kolmogorov que

$$\frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} -1 \qquad \text{quase certo.}$$

Mas $\dfrac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} = \dfrac{1}{n} \log \left(\prod_{k=1}^{n} X_k \right) = \log \left(\prod_{k=1}^{n} X_k \right)^{1/n}$, donde concluímos que

$$\left(\prod_{k=1}^{n} X_k \right)^{1/n} \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} e^{-1} \quad \text{quase certo.}$$

15ªQUESTÃO: Demonstre: se $X_1, X_2, \ldots$ são independentes e identicamente distribuídas, com $\mathbb{E}(X_1) = 1 = \mathrm{Var}(X_1)$, então

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{quase certamente.}$$

Resolução: Sabendo que $X_1, X_2, \ldots$ são *i.i.d.* e $\mathbb{E}(X_1) = 1$ temos pela Lei Forte de Kolmogorov que

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1 \quad \text{quase certamente.}$$

Por outro lado, $\mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 = 1$ logo $\mathbb{E}(X_1^2) = 1 + (\mathbb{E}(X_1))^2 = 2$ e como $X_1^2, X_2^2, \ldots$ são *i.i.d.*, novamente pela Lei Forte de Kolmogorov temos que

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 2 \quad \text{quase certamente.}$$

Assim, $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \sqrt{2}$ quase certo e portanto

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{quase certamente.}$$

16ªQUESTÃO: Seja $0 < \theta < 1/2$. Prove que se $X_1, X_2, \ldots$ são independentes tais que $\mathbb{P}(X_n = n^\theta) = 1/2 = \mathbb{P}(X_n = -n^\theta)$, então

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{quase certamente.}$$

Resolução: Como $X_1, X_2, \ldots$ são variáveis aleatórias independentes com $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2} n^\theta +$

$\frac{1}{2}(-n^{\theta}) = 0 < +\infty$ e $\mathrm{Var}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}(X_n))^2 = \mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(n^{2\theta}) = n^{2\theta}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ onde $\theta \in (0, 1/2)$. Daí temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2\theta}}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{2(\theta-1)} < +\infty$, pois $\theta - 1 < -1/2$ e portanto $2(\theta - 1) < -1$. Assim pela 1ª Lei Forte de Kolmogorov, temos que

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{\mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n)}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{quase certamente.}$$

17ªQUESTÃO: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com densidade comum

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x+1/2)} & x \geq -1/2 \\ 0 & x < -1/2. \end{cases}$$

Demonstre que $S_n \longrightarrow +\infty$ quase certamente, onde $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Resolução: Como $X_1, X_2, \ldots$ são variáveis aleatórias independentes com densidade comum $f(x)$ temos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-1/2} x f(x)\, dx + \int_{-1/2}^{+\infty} x f(x)\, dx \\ &= \int_{-1/2}^{+\infty} x e^{-(x+1/2)}\, dx = e^{-1/2} \int_{-1/2}^{+\infty} x e^{-x}\, dx = \text{(Por Partes)} \\ &= e^{-1/2} \left[-x e^{-x} - e^{-x}\right]_{-1/2}^{+\infty} = -e^{-1/2}\left(\frac{1}{2} e^{1/2} - e^{1/2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Assim, resulta da Lei Forte de Kolmogorov que

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} \quad \text{quase certamente,}$$

ou ainda, que para n suficientemente grande $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \approx \frac{1}{2}$ quase certamente, donde concluímos que para n suficientemente grande $X_1 + \ldots + X_n \approx \frac{n}{2}$ quase certamente, assim $S_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty$ quase certamente.

19ªQUESTÃO: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_k \sim b(n_k, p)$, onde $0 < p < 1$ (p fixo).

(a) Qual a distribuição de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$?

Resolução: Como $X_1, X_2, \ldots$ são variáveis aleatórias independentes tais que $X_k \sim b(n_k, p)$, onde $0 < p < 1$ (p fixo), temos que a distribuição de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ é $b(\sum\limits_{k=1}^{n} n_k, p)$.

Para provar essa afirmação usaremos a seguinte resultado:

(Fórmula da convolução discreta) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes discreta, a variável aleatória $Z = X + Y$ tem distribuição de probabilidade F_Z dada por $F_Z(z) = F_{X+Y}(z) = \mathbb{P}(Z = z) = \sum\limits_{x=0}^{z} F_X(x) F_Y(z - x)$.

De fato, para cada z, o evento $[Z = z]$ é a união dos eventos disjuntos $[X = x]$ e $[Y = z - x]$ com $x = 0, \ldots, z$. Usando a independencia de X e Y temos que

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}([Z = z]) = \mathbb{P}([X = x] \cup [Y = z - x]) \\ &= \mathbb{P}([X = x])\mathbb{P}([Y = z - x]) = \sum_{x=0}^{z} F_X(x) F_Y(z - x). \end{aligned}$$

Consideremos agora X_1, X_2 variáveis aleatórias independentes tais que $X_1, X_2 \sim b(n_k, p)$, onde $0 < p < 1$ (p fixo) e denote $Z = X_1 + X_2$. Assim temos que

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= F_{X_1+X_2}(z) = \mathbb{P}(x_1 + x_2 = z) = \sum_{x=0}^{z} F_{X_1}(x) F_{X_2}(z - x) \\ &= \sum_{x=0}^{z} C_x^{n_1} p^x (1-p)^{n_1 - x} C_{z-x}^{n_2} p^{z-x} (1-p)^{n_2 - z + x} \\ &= p^z \cdot (1-p)^{n_1 + n_2 - z} \sum_{x=0}^{z} C_x^{n_1} \cdot C_{z-x}^{n_2} = C_z^{n_1+n_2} \cdot p^z \cdot (1-p)^{n_1+n_2-z} \end{aligned}$$

Suponha agora por indução em k, isto é, $F_{S_k}(z) = \mathbb{P}(x_1 + \ldots + x_k = z) = C_z^{n_1+\ldots+n_k} \cdot p^z \cdot (1-p)^{n_1+\ldots+n_k-z}$. Assim,

$$\begin{aligned} F_{S_{k+1}}(z) &= F_{S_k + X_{k+1}}(z) = \mathbb{P}(S_k + X_{k+1} = z) \\ &= \sum_{x=0}^{z} F_{S_k}(x) F_{X_{k+1}}(z - x) \\ &= \sum_{x=0}^{z} C_x^{n_1+\ldots+n_k} p^x (1-p)^{n_1+\ldots+n_k-x} C_{z-x}^{n_{k+1}} p^{z-x} (1-p)^{n_{k+1}-z+x} \\ &= C_z^{n_1+\ldots+n_{k+1}} \cdot p^z \cdot (1-p)^{n_1+\ldots+n_{k+1}-z}. \end{aligned}$$

Portanto, $F_{S_k}(z) = C_z^{n_1+\ldots+n_k} \cdot p^z \cdot (1-p)^{n_1+\ldots+n_k-z}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Donde concluímos que $S_n \sim b(\sum\limits_{k=1}^{n} n_k, p)$.

(b) Se $n_k \leq \sqrt{k}$, mostre que a sequência satisfaz a Lei Forte.

Resolução: Sabemos que se X_k tem distribuição binomial (n_k, p) então $\mathbb{E}(X_k) = n_k \cdot p$. Como $n_k \leq \sqrt{k}$ e $0 < p < 1$, segue que $\mathbb{E}(X_k) = n_k \cdot p < n_k \leq \sqrt{k} < +\infty$. Assim concluímos que X_k é integrável para todo $k \in \mathbb{N}$.

Temos ainda que $\text{Var}(X_k) = n_k p(1-p)$, logo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\text{Var}(X_k)}{k^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k p(1-p)}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k} p(1-p)}{k^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p(1-p)}{\sqrt{k^3}} = p(1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}} < +\infty.\end{aligned}$$

Como as variáveis aleatórias são independentes, concluímos que a sequência $X_1, X_2, \ldots$ satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números.

20ªQUESTÃO: Uma massa radioativa emite partículas segundo um processo de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$. Sejam $T_1, T_2, \ldots$ os tempos transcorridos entre emissões sucessivas. Ache o

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_1^2 + \ldots + T_n^2}{n}$$

É limite quase certo ou em probabilidade?

Resolução: Sabemos que os tempos são independentes e possuem a mesma distribuição (Poisson(λ)) logo $T_1, T_2, \ldots$ são *i.i.d.*, assim temos que $T_1^2, T_2^2, \ldots$ também são *i.i.d.*.

Além disso, como já fizemos na letra (a) da questão 24º do Capítulo 3 temos que $\mathbb{E}(T_i^2) = \lambda^2 + \lambda$, desta forma a Lei Forte de Kolmogorov garante que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_1^2 + \ldots + T_n^2}{n} = \lambda^2 + \lambda \quad \text{quase certamente.}$$

OBS: Sabemos que convergência quase certa implica convergência em probabilidade, portanto a convergência também é em probabilidade.

21ªQUESTÃO: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com distribuição comum N(0,1). Qual o limite quase certo de

$$\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{(X_1-1)^2 + \ldots + (X_n-1)^2}?$$

Resolução: Como $X_1, X_2, \ldots$ são variáveis aleatórias *i.i.d.* então $X_1^2, X_2^2, \ldots$ também são *i.i.d.*. Além disso

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(X_1^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot (x e^{-x^2/2})\, dx = \text{(Por Partes)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [-x e^{-x^2/2} + \sqrt{2\pi}]_{-\infty}^{+\infty} = 1
\end{aligned}$$

Assim, usando a Lei Forte de Kolmogorov temos que $\dfrac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1$ quase certamente.

Por outro lado, sabemos que se $X_n \sim N(0,1)$ então $Y_n = (X_n - 1)$ tem distribuição comum $N(-1,1)$ (ver pag. 52). Daí temos que $Y_1, Y_2, \ldots$ são *i.i.d.* e portanto $Y_1^2, Y_2^2, \ldots$ também são *i.i.d.* e mais

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n^2) = \mathbb{E}(Y_1^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-(y+1)^2/2}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-1)^2 e^{-(x-1+1)^2/2}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} 2x e^{-x^2/2}\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx \right) \\
&= 1 + 0 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Pela Lei Forte de Kolmogorov temos que $\dfrac{Y_1^2 + \ldots + Y_n^2}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 2$ quase certamente. Donde concluímos que

$$\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{(X_1-1)^2 + \ldots + (X_n-1)^2} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} \quad \text{quase certamente.}$$

22ªQUESTÃO: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_n \sim U[0, n]$, $n = 1, 2, \ldots$. Chame o $n-$ésimo ensaio de *sucesso* se $X_{2n} > X_{2n-1}$, *fracasso* se $X_{2n} \leq X_{2n-1}$, para $n = 1, 2, \ldots$. Determine a probabilidade de haver sucesso no $n-$ésimo ensaio e ache o limite (se existir) de S_n/n, onde S_n = número de sucessos nos primeiros n ensaios. Esse limite é limite em probabilidade e/ou quase certo?

Resolução: Consideremos inicialmente que $X_{2n} > 2n-1$, sabemos que a distribuição é uniforme então podemos calcular a probabilidade $\mathbb{P}(X_{2n} > 2n-1) = \int\limits_{2n-1}^{2n} \frac{1}{2n}dx = \frac{2n-(2n-1)}{2n} = \frac{1}{2n}$. Note que neste caso sempre temos $X_{2n} > X_{2n-1}$, já que $X_{2n} > 2n-1$.

Daí temos que a probabilidade $X_{2n} \leq 2n-1$ é, portanto $\frac{2n-1}{2n}$. Neste caso temos que $\mathbb{P}(X_{2n} > X_{2n-1}) = \frac{1}{2}$ (já que X_{2n-1} também varia uniformemente em $[0, 2n-1]$).

Portanto, $\mathbb{P}(X_{2n} > X_{2n-1}) = \frac{1}{2n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2n+1}{4n}$. Assim, o $n-$ésimo ensaio tem probabilidade $\frac{2n+1}{4n}$ de sucesso.

Denote agora

$$A_n = \begin{cases} 1 & \text{se} X_{2n} > X_{2n-1} \\ 0 & \text{se} X_{2n} \leq X_{2n-1}. \end{cases}$$

a variável aleatória associada a cada $n-$ésimo ensaio, $n \in \mathbb{N}$.

Sabemos que $A_1, A_2, \ldots$ são independentes, (cada A_k depende apenas de pares disjuntos uns dos outros de variáveis $X_{n's}$) integráveis, já que $\mathbb{E}(A_n) = \frac{2n+1}{4n} < +\infty$ e mais

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{var}(A_n)}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}(A_n^2) - \mathbb{E}^2(A_n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2n+1}{4n} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{4n^2+4n+1}{16n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{4n^3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2+4n+1}{16n^4} < +\infty. \end{aligned}$$

Desta forma, pela Lei Forte de Kolmogorov, temos que as A_n satisfazem a Lei Forte dos Grandes Números, ou seja,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(A_n)}{n} \quad q.c.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\sum\limits_{n=1}^{k} \mathbb{E}(A_n)}{k} &= \frac{1}{k} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{2n+1}{4n} = \frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4k} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

daí temos que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad q.c.$$

Como $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \ln(n)$, temos que $\frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{1+\ln(n)}{4n}$, como $\frac{\ln(n)}{4n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$ e $\frac{1}{4n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$ concluímos que $\frac{1+\ln(n)}{4n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, e portanto $\frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, ou seja, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$ quase certamente (e como consequência temos que também converge em probabilidade).

23ªQUESTÃO: A Lei Forte para variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas e integráveis pode ser estendida ao caso de esperanças infinitas, se admitirmos limites infinitos. Em particular, se $X_1, X_2, \ldots$ são independentes e identicamente distribuídas tais que $\mathbb{E}(X_n) = +\infty$, então $S_n/n \longrightarrow +\infty$ quase certamente. (Compare com o Teorema 5.3. Qual a diferença?) Prove esse resultado em 3 etapas:

(a) Para m inteiro positivo fixo, seja Y_n o trucamento de X_n em m:

$$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{se } \ X_n \leq m \\ 0 & \text{se } \ X_n > m. \end{cases}$$

Então $\frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}(Y_1)$ quase certamente, onde

$$\mathbb{E}(Y_1) = \int_{-\infty}^{m} x dF_{X_1}(x).$$

Resolução: Seja m inteiro positivo fixo, e Y_n o trucamento

$$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{se } \ X_n \leq m \\ 0 & \text{se } \ X_n > m. \end{cases}$$

Daí temos que as Y_n são integráveis, independentes e identicamente distribuídas, já que as X_n o são. Assim pela Lei Forte de Kolmogorov temos que $\frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_1)$ quase certamente.

Como por definição de Y_1 temos $\mathbb{E}(Y_1) = \int x dF_{Y_1}(x) = \int_{-\infty}^{m} x dF_{X_1}(x)$.

(b) $\liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \geq \int_{-\infty}^{m} x dF_{X_1}(x)$ quase certamente. (Sugestão: $X_n \geq Y_n$.)

Resolução: Como $\liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ usamos o fato de $X_n \geq Y_n$ e obtemos que $\liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \geq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n} = \int_{-\infty}^{m} x dF_{X_1}(x)$ quase certamente.

(c) $\frac{S_n}{n} \longrightarrow +\infty$ quase certamente. (Faça $m \longrightarrow +\infty$ em (b)).

Resolução: Fazendo $m \longrightarrow +\infty$ na letra $b)$ acima temos $\int\limits_{-\infty}^{m} xdF_{X_1}(x) \longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdF_{X_1}(x) = \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_n) = +\infty$. Como $\liminf\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{S_n}{n} \geq \int\limits_{-\infty}^{m} xdF_{X_1}(x)$ quase certamente, concluímos que, $\frac{S_n}{n} \longrightarrow +\infty$ quase certamente.

Comentário: A principal diferença entre esse Resultado e o Teorema 5.3 reside no tipo de convergência onde o Teorema garante a convergência em probabilidade enquanto que esse Resultado é mais geral pois garante convergência quase certa e como já vimos convergência quase certa implica convergência em probabilidade.

26ªQUESTÃO: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ independentes tais que $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $\forall n$. Demonstre que se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n) < \infty$, então $\mathbb{E}(\sup\limits_{n>1} |S_n|) < \infty$, onde $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. (Sugestão. Use o critério para integrabilidade do §3.3 e a desigualdade de Kolmogorov.)

Resolução: Como $\text{Var}(X_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n) < \infty$ para todo n temos pela desigualdade de Kolmogorov que para todo $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2}\text{Var}(S_n),$$

como $X_1, X_2, \ldots$ são independentes tais que $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $\forall n$ ficamos com $\text{Var}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2)$ logo $\text{Var}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \text{Var}(X_k)$. Daí temos que

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{n} \text{Var}(X_k).$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\sup_{n>1} |S_n| \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \text{Var}(X_k) \right) < \infty,$$

já que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n) < \infty$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

Pelo critério para integrabilidade do §3.3 (página 117) temos que $\sup\limits_{n>1} |S_n|$ é integrável, ou seja, $\mathbb{E}(\sup_{n>1} |S_n|) < \infty$.

Capítulo 6

1ªQUESTÃO:

(a) Se $X \sim b(n,p)$, qual a função característica de X?

Resolução: Como $X \sim b(n,p)$ sabemos que $\mathbb{P}(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^k$. Assim temos que

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} (e^{it}p)^k (1-p)^k = [(1-p) + pe^{it}]^n \end{aligned}$$

(b) Mostre, usando funções características, que se $X \sim b(m,p)$, $Y \sim b(n,p)$, e X e Y são independentes, então $X + Y \sim b(m+n,p)$.

Resolução: Sabemos que se X e Y são independentes então $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$ (Propriedade 5). Pela Letra (a) temos que $\varphi_X(t) = [(1-p)+pe^{it}]^m$ e $\varphi_Y(t) = [(1-p)+pe^{it}]^n$ logo $\varphi_{X+Y}(t) = [(1-p)+pe^{it}]^m \cdot [(1-p)+pe^{it}]^n = [(1-p)+pe^{it}]^{m+n}$ e portanto $X+Y \sim b(m+n,p)$.

2ªQUESTÃO: Mostre que se $X_1, \ldots, X_n$ são independentes com, cada uma, distribuição simétrica em torno de 0, então $\sum_{j=1}^{n} a_j X_j$ possui distribuição simétrica em torno de 0, para toda escolha das constantes $a_j \in \mathbb{R}$.

Resolução: Sabemos que se $X_1, \ldots, X_n$ são independentes então

$$\varphi_{\sum_{j=1}^{n} a_j X_j}(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{a_j X_j}(t) = (\text{Propriedade 8}) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(a_j t).$$

Por outro lado todos os X_j, $1 \leq j \leq n$ possuem distribuição simétrica em torno de 0, ou seja, $\varphi_{X_j}(t)$, $1 \leq j \leq n$ é real para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí temos que $\varphi_{\sum_{j=1}^{n} a_j X_j}(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(a_j t)$ é real para toda escolha das constantes $a_j \in \mathbb{R}$, o que nos permite concluir (pela Propriedade

7) que $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j X_j$ possui distribuição simétrica em torno de 0, para toda escolha das constantes $a_j \in \mathbb{R}$.

3ªQUESTÃO: Seja φ uma função característica. Mostre que $\psi(t) = e^{\lambda(\varphi(t)-1)}$, onde $\lambda > 0$, também é função característica. (Sugestão. Sejam $N, X_1, X_2, \ldots$ independentes tais que $N \sim$ Poisson(λ) e as X_n são identicamente distribuídas com $\varphi_{X_n} = \varphi$. Defina $Y = S_N$, onde $S_n = X_1 + \ldots + X_n$; N é um "tempo de parada" para a sequencia de somas parciais. Então $\varphi_Y = \psi$. A distribuição de Y é chamada de distribuição composta de poisson. A distribuição comum de Poisson corresponde ao caso $X_n = 1$, isto é, $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1$.)

Resolução: Sejam $N, X_1, X_2, \ldots$ independentes tais que $N \sim$ Poisson(λ) e as X_n são identicamente distribuídas com $\varphi_{X_n} = \varphi$. Defina $Y = S_N$, onde $S_n = X_1 + \ldots + X_n$; N é um "tempo de parada" para a sequencia se somas parciais.

Usando que as X_n são $i.i.d.$ com $\varphi_{X_n} = \varphi$ chegamos que $\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j}(t) = \prod\limits_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t) = (\varphi(t))^n$. Ademais, sabemos que

$$
\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= \mathbb{E}(e^{itY}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{E}(e^{itY}|N = j)\mathbb{P}(N = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{E}(e^{it(X_1+\ldots+X_j)}|N = j)\mathbb{P}(N = j) \\
&= (\text{como } N \text{ e os } X_{n's} \text{ são independentes}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{E}(e^{it(X_1+\ldots+X_j)})\mathbb{P}(N = j) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \varphi_{X_1+\ldots+X_j}(t)\mathbb{P}(N = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \varphi_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot \varphi_{X_j}(t)\mathbb{P}(N = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} (\varphi(t))^j \mathbb{P}(N = j) \\
&= (\text{como } N \sim \text{Poisson}(\lambda)) = \sum_{j=1}^{+\infty} (\varphi(t))^j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(\lambda \cdot \varphi(t))^j}{j!} \\
&= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda\varphi(t)} = e^{\lambda(\varphi(t)-1)}, \quad \lambda > 0.
\end{aligned}
$$

Desda forma tomando $\psi(t) = \varphi_Y(t)$, temos que $\psi(t) = e^{\lambda(\varphi(t)-1)}$ é uma função característica.

5ªQUESTÃO:

(a) Mostre que se X tem distribuição Cauchy-padrão, então $\varphi_{2X}(t) = \varphi_X^2(t)$. (Pode usar sem provar, que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+x^2}dx = e^{-|t|}.)$$

Utilize esse resultado para provar que

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \not\Rightarrow \quad X \text{e } Y \quad \text{independentes},$$

e portanto,

$$F_{X+Y}(z) = F_X(z) * F_Y(z), \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \not\Rightarrow \quad X \text{e } Y \quad \text{independentes}.$$

($F_X * F_Y$ é a convolução de F_X com F_Y.)

Resolução: Sabendo que X tem distribuição Cauchy-padrão temos que X tem densidade $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Assim a função característica de X é dada por

$$\varphi_X(t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(tx)+i\,\mathrm{sen}(tx)}{\pi(1+x^2)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{\pi(1+x^2)}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}(tx)}{\pi(1+x^2)}dx$$

Como $\frac{\mathrm{sen}(tx)}{\pi(1+x^2)}$ é função ímpar temos que $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}(tx)}{\pi(1+x^2)}dx = 0$ logo $\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{\pi(1+x^2)}dx = e^{-|t|}$, (aqui também poderíamos usar que X tem distribuição simétrica em torno de zero para concluir pela propriedade 7 que $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}(tx)}{\pi(1+x^2)}dx = 0$). Pela propriedade 8 temos que $\varphi_{2X}(t) = \varphi_X(2t) = e^{-|2t|} = e^{-2|t|} = (e^{-|t|})^2 = (\varphi_X(t))^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Daí temos que

$$\varphi_{X+X}(t) = \varphi_{2X}(t) = (\varphi_X(t))^2 = \varphi_X(t)\cdot\varphi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Observe também que X e X são dependentes o que mostra que

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \not\Rightarrow \quad X \text{ e } Y \quad \text{são independentes}.$$

Além disso, pela unicidade (φ_X determina F_X e F_X determina φ_X) temos que $\varphi_X(t)\cdot\varphi_X(t)$ é a função característica cuja função de distribuição é $F_X(z) * F_X(z)$ e $\varphi_{X+X}(t)$ é a função característica cuja função de distribuição é $F_{X+X}(z)$, assim $F_X(z) * F_X(z) = F_{X+X}(z)$,

$\forall z \in \mathbb{R}$ (já que $\varphi_{X+X}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_X(t)$), mas X e X são dependentes, logo $F_{X+Y}(z) = F_X(z) * F_Y(z), \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \not\Rightarrow \quad X$ e Y são independentes.

(b) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ independentes e identicamente distribuídas, com distribuição comum Cauchy-padrão. Demonstre que a média amostral

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1, \ldots, X_n}{n}$$

também é Cauchy-padrão.

Resolução: Como $X_1, \ldots, X_n$ são independentes temos que $\varphi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t)$. Usando agora o fato de $X_1, \ldots, X_n$ serem identicamente distribuídas, com distribuição comum Cauchy-padrão temos

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-|t|} = e^{-n|t|} = e^{-|nt|}.$$

Usando agora a propriedade 8 temos que

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = e^{-|n\frac{t}{n}|} = e^{-|t|}.$$

Daí concluímos pela unicidade entre funções características e funções de distribuição que $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ também tem distribuição Cauchy-padrão.

6ªQUESTÃO: Sejam X e Y variáveis aleatórias com a mesma distribuição. Demonstre:
(a) Se X e Y são independentes, então $X - Y$ tem distribuição simétrica em torno do zero.

Resolução: Como X e Y são independentes, então

$$\varphi_{X-Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(-t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_X(-t) = \varphi_X(t) \cdot \overline{\varphi_X(t)},$$

onde a penultima igualdade decorre do fato de X e Y terem a mesma distribuição, e como $\varphi_X(t) \cdot \overline{\varphi_X(t)} \in \mathbb{R}$ concluímos que $X - Y$ tem distribuição simétrica em torno do zero.

(b) Se X e Y tomam só dois valores, então $X-Y$ tem distribuição simétrica em torno do zero.

Resolução: Como X e Y tomam só dois valores, digamos a e b (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$). Suponha que $\mathbb{P}(X = a) = p$ e $\mathbb{P}(X = b) = 1 - p$, com $0 < p < 1$ e $\mathbb{P}(Y = a) = q$ e $\mathbb{P}(Y = b) = 1 - q$, com $0 < q < 1$. Daí temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{sen}(t(X-Y))] &= \text{sen}(0)\mathbb{P}(X-Y=0) + \text{sen}(a-b)\mathbb{P}(X-Y=a-b) \\
&+ \text{sen}(b-a)\mathbb{P}(X-Y=b-a) \\
&= \text{sen}(a-b)\mathbb{P}(X-Y=a-b) - \text{sen}(a-b)\mathbb{P}(X-Y=b-a) \\
&= (\text{usando que } X \text{ e } Y \text{ são i.i.d.}) \\
&= \text{sen}(a-b)\mathbb{P}(X-Y=a-b) - \text{sen}(a-b)\mathbb{P}(X-Y=a-b) = 0.
\end{aligned}$$

Pela propriedade 7 concluímos que $X - Y$ tem distribuição simétrica em torno do zero.

7ªQUESTÃO:

(a) Suponha que $X \sim \exp(\lambda)$ e mostre que a função característica de X é

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{\lambda - it} = \frac{\lambda^2 + it\lambda}{\lambda^2 + t^2}.$$

Resolução: Como $X \sim \exp(\lambda)$ sabemos que X tem densidade dada por $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{[0,+\infty)}$. Logo

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \int_0^{+\infty} e^{itx} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x} dx = (\text{tomando } u = (it-\lambda)x) \\
&= \frac{\lambda}{it-\lambda} \int_0^{+\infty} e^u du = \frac{\lambda}{it-\lambda} e^{(it-\lambda)x}|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{it-\lambda}(e^{-\lambda x}(\cos(tx) + i\,\text{sen}(tx)))|_0^{+\infty} \\
&= -\frac{\lambda}{it-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - it} = \frac{\lambda(\lambda+it)}{(\lambda-it)(\lambda+it)} = \frac{\lambda^2 + it\lambda}{\lambda^2+t^2}
\end{aligned}$$

(b) Seja Y exponencial dupla com densidade $f_Y(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$, $y \in \mathbb{R}$. Calcule a função característica de Y. (sugestão. Use simetria e o item (a)).

Resolução: Como Y possui densidade $f_Y(y) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$, $y \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity-\lambda|y|} dy \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{(it+\lambda)y} dy + \frac{\lambda}{2} \int_{0}^{+\infty} e^{(it-\lambda)y} dy \\
&= (\text{similar ao item (a)}) = \frac{\lambda}{2(it+\lambda)} + \frac{\lambda}{2(\lambda - it)} \\
&= \frac{\lambda(\lambda - it) + \lambda(\lambda + it)}{2(it+\lambda)(\lambda - it)} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}
\end{aligned}$$

(c) Demonstre: Se Z e W são independentes e identicamente distribuídas, com $Z \sim \exp(\lambda)$, então $Z - W$ é exponencial dupla.

Resolução: Como Z e W são independentes $\varphi_{Z-W}(t) = \varphi_Z(t) \cdot \varphi_W(-t)$, sabendo ainda que Z e W são identicamente distribuídas, com $Z \sim \exp(\lambda)$ temos que

$$\varphi_{Z-W}(t) = \varphi_Z(t) \cdot \varphi_W(-t) = \frac{\lambda}{\lambda - it} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + it} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}.$$

Portanto $Z - W$ é exponencial dupla.

9ªQUESTÃO: Demonstre:

(a) Se φ é função característica e existe $\lambda \neq 0$ tal que $\varphi(\lambda) = 1$, então a distribuição correspondente a φ está concentrada nos pontos $\pm k\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$, $k = 0, 1, \ldots$.

Resolução: Seja A o conjunto dado por $A = \{\pm k\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right); \quad k = 1, 2, \ldots\}$. Suponha por absurdo que a distribuição correspondente a φ não está concentrada nos pontos $\pm k\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$, $k = 0, 1, \ldots$, ou seja, que $\mathbb{P}(A^c) \neq 0$.

Assim temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\cos(\lambda X)] &= \mathbb{P}(A) \cos\left[\pm\lambda k \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\right] + \int_{A^c} \cos(\lambda x) dF_X(x) \\
&= \mathbb{P}(A) + \int_{A^c} \cos(\lambda x) dF_X(x) < \mathbb{P}(A) + \int_{A^c} dF_X(x) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1.
\end{aligned}$$

Deste modo temos que $\mathrm{Re}(\varphi_X(\lambda)) < 1$. Absurdo. Portanto, concluímos que φ está concentrada nos pontos $\pm k\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$, $k = 0, 1, \ldots$.

(b) Se φ é uma função característica e existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(t) = 1$ para todo t com $|t| < \delta$, então $\varphi(t) = 1\ \forall t$. (Qual a distribuição correspondente a φ?)

Resolução: Como para todo $t \in (-\delta, \delta)$ temos $\varphi(t) = 1$ então $\varphi\left(\frac{\delta}{2^p}\right) = 1$ para todo $p \in \mathbb{N}$, já que $\frac{\delta}{2^p} \in (-\delta, \delta)$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Assim, pela letra a), temos que φ está concentrada em $\pm k\left(\frac{2\pi}{\frac{\delta}{2^p}}\right) = \pm k\left(\frac{2^{p+1}\pi}{\delta}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Como $\bigcap\limits_{p=1}^{+\infty}\left\{\pm\frac{2^{p+1}k\pi}{\delta}\right\} = \{0\}$ e se X é variável aleatória tal que sua distribuição é dada por

$$\mathbb{P}(X = a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a = 0 \\ 0 & \text{se } a \neq 0 \end{cases}$$

então $\varphi_X \equiv 1$.

De fato, $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\mathrm{sen}(tX)) = \mathbb{E}(\cos(0)) + i\mathbb{E}(\mathrm{sen}(0)) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

10ªQUESTÃO: A *função geradora de momentos* de uma variável aleatória X é definida por

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}),\ t \in \mathbb{R}.$$

(É permitido a ψ_X assumir o valor $+\infty$.) Demonstre que se $\mathbb{E}(e^{\delta|X|}) < \infty$ para algum $\delta > 0$, então:

(a) $\psi(t)$ é finito para $t \in [-\delta, \delta]$;

Resolução: Como $tX \leq \delta|X|$, para todo $|t| \leq \delta$ e todo X. Daí temos que $e^{tX} \leq e^{\delta|X|}$ e portanto $\psi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \mathbb{E}(e^{\delta|X|}) < +\infty$, para todo $t \in [-\delta, \delta]$.

(b) todos os momentos de X são finitos; e

Resolução: Como $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, temos que $e^{\delta|x|} = 1 + (\delta|x|) + \frac{(\delta|x|)^2}{2!} + \frac{(\delta|x|)^3}{3!} + \ldots$.

Daí concluímos que $e^{\delta|x|} \geq \frac{(\delta|x|)^k}{k!}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

Sabemos que $+\infty > \mathbb{E}(e^{\delta|X|}) \geq \mathbb{E}(\frac{(\delta|X|)^k}{k!}) = \frac{\delta^k}{k!}\mathbb{E}(|X|^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, como $\frac{\delta^k}{k!}$ é constante para cada k fixado, chegamos que $\mathbb{E}(|X|^k) < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$. O que mostra que X tem todos os momentos finitos.

(c) ψ possui derivadas contínuas de toda ordem em $(-\delta, \delta)$, e $\psi^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$ para $k = 1, 2, \ldots$. (Sugestão. Use o método de prova da propriedade FC9.)

Resolução: Como $\psi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int e^{tx}dF_X(x)$, derivando $\psi_X(t)$ ficamos com $\psi_X^{(k)}(t) = \int x^k e^{tx}dF_X(x)$ e portanto $\psi_X^{(k)}(0) = \int x^k dF_X(x) = \mathbb{E}(X^k)$.

Resta-nos mostrar a diferenciação dentro da integral. Queremos provar inicialmente que $\psi_X'(t) = \int xe^{tx}dF_X(x)$.

Seja $h \in \mathbb{R}$ tal que $h \neq 0$, assim

$$\frac{\psi_X(t+h) - \psi_X(t)}{h} = \mathbb{E}\left(\frac{e^{(t+h)X} - e^{tX}}{h}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\frac{(e^{hX}-1)}{h}\right).$$

Observe que $\frac{e^{hx}-1}{h} \xrightarrow[h \longrightarrow 0]{} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, assim $e^{tx}\frac{(e^{hx}-1)}{h} \xrightarrow[h \longrightarrow 0]{} xe^{tx}$. Além disso, temos que

$$\left|e^{tx}\frac{(e^{hx}-1)}{h}\right| = |e^{tx}| \cdot \left|\frac{(e^{hx}-1)}{h}\right| = |e^{tx}| \cdot \left|\frac{\int\limits_0^h xe^{sx}ds}{h}\right| \leq |e^{\delta x}| \cdot |x| \cdot \left|\frac{\int\limits_0^h |e^{sx}|ds}{h}\right| \leq (e^{\delta x})^2 \cdot |x|,$$

para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Como $e^{\delta X} \leq e^{\delta|X|} < \infty$ e $|X|$ é integrável (já que X tem todos os momentos finitos (letra b)) concluímos pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\psi_X'(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\psi_X(t+h) - \psi_X(t)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left(e^{tX}\frac{(e^{hX}-1)}{h}\right) = \mathbb{E}\left(Xe^{tX}\right) = \int xe^{tx}dF_X(x).$$

Decorre também desse Teorema que $\psi'(t)$ é contínua em t, pois $xe^{tx} = \lim\limits_{s \longrightarrow t} xe^{sx}$ e $|xe^{tx}| \leq |x| \cdot e^{\delta|X|}$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$.

Usando agora indução em n, isto é, supondo válido para n verificaremos que vale também para $n+1$, concluímos o exercício.

Como $\psi_X^{(n)}(t) = \int x^n e^{tx}dF_X(x)$ queremos mostrar que $\psi_X^{(n)}(t)$ possui derivada contínua e tal que $\psi_X^{(n+1)}(t) = \int x^{n+1}e^{tx}dF_X(x)$.

Procedendo de maneira inteiramente análoga ao que fizemos acima teremos, para $h \in \mathbb{R}$ tal que $h \neq 0$,

$$\frac{\psi_X^{(n)}(t+h) - \psi_X^{(n)}(t)}{h} = \mathbb{E}\left(\frac{X^n e^{(t+h)X} - X^n e^{tX}}{h}\right) = \mathbb{E}\left(X^n e^{tX}\frac{(e^{hX}-1)}{h}\right).$$

Sabemos que $\frac{e^{hx}-1}{h} \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, assim $x^n e^{tx}\frac{(e^{hx}-1)}{h} \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} x^{n+1}e^{tx}$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\left|x^n e^{tx}\frac{(e^{hx}-1)}{h}\right| &= |x^n|\cdot|e^{tx}|\cdot\left|\frac{(e^{hx}-1)}{h}\right| = |x^n|\cdot|e^{tx}|\cdot\left|\frac{\int\limits_0^h xe^{sx}ds}{h}\right| \\
&\leq |x^n|\cdot|e^{\delta x}|\cdot|x|\cdot\left|\frac{\int\limits_0^h |e^{sx}|ds}{h}\right| \leq (e^{\delta x})^2\cdot|x^{n+1}|,
\end{aligned}$$

para todo $t \in (-\delta,\delta)$. Como $e^{\delta X} \leq e^{\delta|X|} < \infty$ e $|X^{n+1}|$ é integrável (já que X tem todos os momentos finitos (letra b)) concluímos pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}
\psi_X^{(n+1)}(t) &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\psi_X(t+h)-\psi_X(t)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0}\mathbb{E}\left(x^n e^{tX}\frac{(e^{hX}-1)}{h}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^{n+1}e^{tX}\right) = \int x^{n+1}e^{tx}dF_X(x).
\end{aligned}$$

Decorre também desse Teorema que $\psi^{(n+1)}(t)$ é contínua em t, pois $x^{n+1}e^{tx} = \lim\limits_{s\longrightarrow t} x^{n+1}e^{sx}$ e $|x^{n+1}e^{tx}| \leq |x^{n+1}|\cdot e^{\delta|X|}$ para todo $t \in (-\delta,\delta)$.

11ªQUESTÃO: Obtenha a função geradora de momentos (definida no exercício anterior) das variáveis aleatórias seguintes:

(a) $X \sim$ Poisson(λ), onde $\lambda > 0$.

Resolução: Sabemos que

$$\psi_X(t) \;=\; \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{tn} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}.$$

(b) $X \sim$ Cauchy-Padrão.

Resolução: Como $X \sim$ Cauchy-Padrão, temos que X tem densidade $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Assim,

$$\psi_X(t) \;=\; \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)}dx = +\infty$$

já que, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)} = +\infty$ e $\dfrac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)} > 0$, portanto $\psi_X(t) = +\infty$.

(c) $X \sim \exp(\lambda)$, onde $\lambda > 0$. Utilize o resultado para calcular os momentos $\mathbb{E}(X^k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Confira com os momentos obtidos no Exemplo 5 do Capítulo 3 (§3.4).

Resolução: Se $X \sim \exp(\lambda)$, X tem densidade $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{[0,+\infty)}$, logo a função geradora de momentos é dada por

$$\begin{aligned}
\psi_X(t) \;&=\; \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{[0,+\infty)}dx = \lambda\int_{0}^{+\infty} e^{(t-\lambda)x}dx = \lambda\int_{0}^{+\infty} e^{(t-\lambda)x}dx \\
&=\; \text{(usando substituição, similar a questão 7 letra a)} \\
&=\; \frac{\lambda}{t-\lambda}e^{(t-\lambda)x}|_0^{+\infty} = (\text{para } t \le \lambda) = \frac{\lambda}{\lambda - t}.
\end{aligned}$$

Se $t > \lambda$ temos $\psi_X(t) = +\infty$.

Para $t \le \lambda$ podemos calcular os momentos, usamos a letra (c) da questão anterior. Como, $\psi'_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}$, $\psi''_X(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}$, $\psi'''_X(t) = \frac{6\lambda}{(\lambda-t)^3}$ procedendo por indução concluímos que $\psi^k_X(t) = \frac{k!\lambda}{(\lambda-t)^{k+1}}$. Como $\mathbb{E}(X^k) = \psi^k_X(0) = \frac{k!\lambda}{\lambda^{k+1}} = \frac{k!}{\lambda^k}$ o que condiz com os momentos obtidos no §3.4.

12ªQUESTÃO: Verifique se $c_1, c_2, \ldots$ e c são números complexos tais que $c_n \longrightarrow c$, então

$\left(1+\frac{c_n}{n}\right)^n \longrightarrow e^c$. (Sugestão. Considere o logaritmo principal de $1+\frac{c_n}{n}$.)

Resolução: Ver Livro do Durrett 3º edição páginas 110 e 111.

14ªQUESTÃO: Qual a distribuição de X se X tem função característica $\varphi_X(t) = \cos^2(t)$? (Veja o Exemplo 3.)

Resolução: Como $\varphi_X(t) = \cos^2(t)$ é função característica, sabemos pela propriedade 7 que X tem distribuição simétrica em torno de zero. Como $\cos^2(2\pi) = 1$ concluímos pelo exercício 9 do capítulo 6 que a distribuição está concentrada nos pontos $\pm k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Analisemos para os casos ± 1. Sejam X e Y variáveis aleatórias *i.i.d.* tais que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$. Pelo exemplo 3 da página 233, temos que $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = \cos(t)$.

Como, por hipótese, X e Y são independentes, temos $\varphi_{X+Y}(t) = \cos(t) \cdot \cos(t) = \cos^2(t)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=-2) &= \mathbb{P}(X=-1, Y=-1) = \mathbb{P}(X=-1)\cdot\mathbb{P}(Y=-1) = 1/4, \\
\mathbb{P}(X+Y=0) &= \mathbb{P}(X=-1, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=-1) = 1/4 + 1/4 = 1/2, \\
\mathbb{P}(X+Y=2) &= \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathbb{P}(X=1)\cdot\mathbb{P}(Y=1) = 1/4.
\end{aligned}$$

Como a distribuição $X+Y$ é simétrica, $\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[\cos(t(X+Y))]$. Note que $\varphi_{X+Y}(t) = \cos^2(t)$, já que,

$$\begin{aligned}
\varphi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}[\cos(t(X+Y))] = \frac{1}{4}\cos(-2t) + \frac{1}{2}\cos(0) + \frac{1}{4}\cos(2t) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)}{2} \\
&= \frac{2\cos^2(t)}{2} = \cos^2(t).
\end{aligned}$$

15ªQUESTÃO: Mostre que é possível para uma sequência de funções de distribuição convergir em todo ponto sem o limite ser uma função de distribuição. (Sugestão. Considere as variáveis aleatórias constantes $X_n = n$.)

Resolução: Considere as variáveis aleatórias constantes $X_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Daí temos para

$n \in \mathbb{N}$ a seguinte sequência de funções de distribuição

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq n \\ 0 & \text{se } x < n. \end{cases}$$

Note que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, mas $F(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ não é função de distribuição, já que dado uma sequência de números reais, $x_n \nearrow +\infty$, teremos $F(x_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$ o que contraria a terceira propriedade das funções de distribuição (pag. 38).

16ªQUESTÃO: Prove: se $F_n \longrightarrow F$ fracamente e F é contínua, então $F_n(x)$ converge para $F(x)$ uniformemente na reta.

Resolução: Como F é funções de distribuição, temos que $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1$. Sabendo que F é contínua, temos pelo Teorema do Valor intermediário que para todo $\varepsilon > 0$ existe $a(\varepsilon) = a > 0$ tal que $F(-a) + (1 - F(a)) < \varepsilon$.

Sendo F contínua e $[-a, a]$ compacto, concluímos que $F|_{[-a,a]}$ é uniformemente contínua. Daí podemos escolher um conjunto finito de pontos, digamos $x_k \in [-a, a]$, $k \in \mathbb{N}$, tais que $|F(y) \leq F(x)| < \varepsilon$, sempre que $x_k \leq x \leq y \leq x_{k+1}$.

Usando agora a finitude dos pontos x_k podemos concluir que existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$ temos $|F_n(x_k) - F(x_k)| < \varepsilon$.

Sabendo que F_n é não decrescente e positiva temos para $x \in [x_k, x_{x+1}]$ que

$$F_n(x) - F(x) \leq F_n(x_{k+1}) - F(x) \leq F_n(x_{k+1}) - F(x_{k+1}) + F(x_{k+1}) - F(x) < 2\varepsilon$$

para $n > n_0$. Por outro lado, F também é não decrescente e positiva, logo

$$F(x) - F_n(x) \leq F(x) - F_n(x_k) \leq F(x) - F(x_k) + F(x_k) - F_n(x_k) < 2\varepsilon$$

para $n > n_0$.

Deste modo temos para todo $n > n_0$, $|F_n(x) - F(x)| < 2\varepsilon$.

Resta-nos portanto os casos em que $x > a$ e $x < -a$. Se $x > a$, temos $F_n(x) \geq F_n(a) \longrightarrow F(a) > 1 - \varepsilon + F(-a) > 1 - \varepsilon$. Deste modo para n suficientemente grande temos $F_n(x) > 1 - \varepsilon$. Como $F(x) > 1 - \varepsilon$ para $x > a$, temos que, para $n > n_0$, $|F_n(x) - F(x)| < 2\varepsilon$, ou seja,

$F_n \longrightarrow F$ uniformemente em $x > a$.

De modo análogo mostramos para $x < -a$. Daí para $n > n_0$ suficientemente grande, temos que F_n converge uniformemente para F.

17ªQUESTÃO: Utilize funções características para provar: se $X_n \xrightarrow{D} N(0,1)$ e $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais tal que $a_n \longrightarrow a$ finito, então $X_n + a_n \xrightarrow{D} N(a,1)$.

Resolução: Como $X_n \xrightarrow{D} N(0,1)$ então $\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Denotemos $Y_n = X_n + a_n$, pela propriedade 8,

$$\varphi_{Y_n} = \varphi_{X_n+a_n} = e^{ita_n}\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} e^{ita}e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{ita-\frac{t^2}{2}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto $X_n + a_n = Y_n \xrightarrow{D} N(a,1)$.

18ªQUESTÃO: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias, cada uma tendo distribuição simétrica em torno de zero. Demonstre que se $X_n \xrightarrow{D} X$, então X também tem distribuição simétrica em torno de zero.

Resolução: Como cada X_n, $n \in \mathbb{N}$ tem distribuição simétrica em torno de zero então $\varphi_{X_n}(t) \in \mathbb{R}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo (falso) Teorema de $Helly - Bray$ e pelo Teorema de continuidade de Paul Lévy sabemos que

$$X_n \xrightarrow{D} X \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como a sequência de números reais $(\varphi_{X_n}(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo $t \in \mathbb{R}$, já que $X_n \xrightarrow{D} X$, concluímos que $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Pela propriedade 7 temos que X tem distribuição simétrica em torno de zero.

19ªQUESTÃO: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ independentes e identicamente distribuídas, com $X_n \sim U[0,1]$, e sejam $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$, $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $U_n = nY_n$, $V_n = n(1 - Z_n)$. Mostre que, quando $n \longrightarrow \infty$:

(a) $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ e $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.

Resolução: Dado $\varepsilon > 0$ considere,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(|\min(X_1,\ldots,X_n)| \geq \varepsilon)\\
&= (\text{como}\ \ X_n \sim U[0,1]) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(\min(X_1,\ldots,X_n) \geq \varepsilon)\\
&= (\text{como são } i.i.d) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}(\mathbb{P}(X_1 \geq \varepsilon))^n\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}(1-\varepsilon)^n = 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$ considere,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(|Z_n - 1| \geq \varepsilon) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(|\max(X_1,\ldots,X_n) - 1| \geq \varepsilon)\\
&= (\text{como}\ \ X_n \sim U[0,1]) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}([1 - \max(X_1,\ldots,X_n)] \geq \varepsilon)\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(\max(X_1,\ldots,X_n) \leq 1-\varepsilon)\\
&= (\text{como são } i.i.d) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}(\mathbb{P}(X_1 \leq 1-\varepsilon))^n\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}(1-\varepsilon)^n = 0.
\end{aligned}$$

(b) $U_n \xrightarrow{D} W$ e $V_n \xrightarrow{D} W$ onde W tem distribuição exponencial de parâmetro 1.

Resolução: Seja F_{U_n} a função de distribuição associada a variável aleatória U_n, $n \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar inicialmente que $F_{U_n} \xrightarrow{D} W$ para todo ponto de continuidade de W, onde W tem distribuição exponencial de parâmetro 1.

Sabemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty}F_{U_n}(x) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(U_n \leq x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(nY_n \leq x)\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(Y_n \leq x/n) = 1 - \lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(Y_n > x/n)\\
&= 1 - \lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(\min(X_1,\ldots,X_n) > x/n)\\
&= (\text{como as v.a's são i.i.d..}) = 1 - \lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(X_1 > x/n)^n\\
&= (\text{como}X_n \sim U[0,1]) = 1 - \lim_{n\longrightarrow+\infty}(1 - x/n)^n = 1 - e^{-x} = W.
\end{aligned}$$

Já vimos (pag. 41) que W é função de distribuição exponencial com parâmetro 1, e concluímos a primeira parte do item (b).

De modo análogo podemos observar que $V_n \xrightarrow{D} W$. Para tanto considere F_{V_n} a função de distribuição associada a variável aleatória V_n, $n \in \mathbb{N}$. Daí temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow +\infty} F_{V_n}(x) &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(V_n \leq x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}((1 - Z_n) \leq x/n) \\
&= 1 - \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}((1 - Z_n) > x/n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n < 1 - x/n) \\
&= 1 - \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) < 1 - x/n) \\
&= (\text{como as v.a's são i.i.d..}) = 1 - \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_1 < 1 - x/n)^n \\
&= (\text{como} X_n \sim U[0,1]) = 1 - \lim_{n \longrightarrow +\infty} (1 - x/n)^n = 1 - e^{-x} = W.
\end{aligned}$$

Portanto $V_n \xrightarrow{D} W$ onde W tem distribuição exponencial de parâmetro 1.

20ªQUESTÃO: Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas, tais que $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_n = -1)$, e seja

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} X_k.$$

Mostre que $Y_n \xrightarrow{D} U[-1,1]$. (Sugestão. Use a igualdade $\cos\theta = \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2\operatorname{sen}\theta}$.)

Resolução: Como

$$\varphi_{X_n}(t) = \mathbb{E}(e^{itX_n}) = e^{it}\mathbb{P}(X_n = 1) + e^{-it}\mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t,$$

temos pela Propriedade 8 que

$$\varphi_{\frac{1}{2^k}X_k}(t) = \varphi_{X_k}\left(\frac{1}{2^k}t\right) = \cos(2^{-k}t).$$

Como as variáveis aleatórias X_n, $n \in \mathbb{N}$ são independentes temos que $\varphi_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \cos(2^{-k}t)$, usando agora que $\cos\theta = \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2\operatorname{sen}\theta}$ e simplificando através da expansão do produtorio ficamos com

$$\varphi_{Y_n}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0 \\ \frac{\operatorname{sen} t}{2^n \operatorname{sen} 2^{-n} t} & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$$

fixado $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e calculando $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{2^n \operatorname{sen} 2^{-n} t} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{\operatorname{sen} t}{t}}{\frac{\operatorname{sen} 2^{-n} t}{2^{-n} t}} = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$.

Assim, temos que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0 \\ \frac{\operatorname{sen} t}{t} & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$$

Pelo Teorema da Continuidade de Paul Lévy essa função é uma função característica, pois ela é contínua no ponto zero e converge pontualmente para a dada função limite.

Note agora que se $X \sim U[-1,1]$ (X é simétrica em torno de zero), a função característica de X será dada por

$$\varphi_X(t) = \int_{-1}^{1} \frac{\cos tx}{2} dt = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0 \\ \frac{\operatorname{sen} t}{t} & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$$

pela unicidade das funções características, temos que $Y_n \xrightarrow{D} U[-1,1]$.

Capítulo 7

3ªQUESTÃO: Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que X_n tem distribuição uniforme $[0, n]$, $\forall n$. Mostre que a condição de Lindeberg está satisfeita e enuncie o Teorema Central de Limite resultante. (Calcule os parâmetros!)

Resolução: Como X_n tem distribuição uniforme $[0, n]$, $\forall n$. Sabemos que $\mathbb{E}(X_k) = \int_0^k \frac{x}{k} dx = \frac{k}{2}$ e $\sigma_k^2 = \operatorname{Var}(X_k) = \int_0^k \frac{x^2}{k} dx - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{12}$.

Daí temos que $s_k^2 = \operatorname{Var}(S_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{12}$, onde $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ e $s_k = \sqrt{\operatorname{Var}(S_k)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2}$.

Verificaremos qual é a ordem de s_k^2 (e não seu valor exato), para isso usaremos o seguinte lema:

Lema: Para $\lambda > 0$, $\frac{1}{n^{\lambda+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^{\lambda} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \frac{1}{\lambda+1}$, de maneira que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\lambda}$ é da ordem de $n^{\lambda+1}$.

Demonstração. Livro "Probabilidade: um curso em nível intermediário", de Barry R. James, página 271. □

Para $1 \leq k \leq n$,

$$\int\limits_{|x-\mathbb{E}(X_k)|>\varepsilon s_n} (x-\mathbb{E}(X_k))^2 dF_k(x) = \int (x-\frac{k}{2})^2 \mathbb{I}_{\{|x-\frac{k}{2}|>\varepsilon s_n\}}(x) dF_k(x)$$
$$= \frac{1}{k}\int\limits_0^k (x-\frac{k}{2})^2 \mathbb{I}_{\{|x-\frac{k}{2}|>\varepsilon s_n\}}(x) dx = 0$$

se $n < \varepsilon s_n$ pois, neste caso, o integrando toma o valor zero em $[0,k]$.

Pelo Lema, temos que s_n^2 é da ordem de n^3. Logo, s_n é da ordem $n^{3/2}$. Assim, o lema implica que

$$\frac{s_n^2}{n^3} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \frac{1}{36}.$$

Então $\frac{s_n^2}{n^2} = \frac{s_n^2}{n^3}n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, de modo que $n < \varepsilon s_n$ para n suficientemente grande.

Assim, para n suficientemente grande, todas as parcelas são nulas, satisfazendo que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \frac{1}{s_k^2}\sum_{n=1}^{k} \int\limits_{|x-\mathbb{E}(X_n)|>\varepsilon s_k} (x-\mathbb{E}(X_n))^2 dF_n(x) = 0.$$

Observe agora que $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1)+\ldots+\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\ldots+\frac{n}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$ e que $\sigma_1^2 = \frac{1}{12}$, $\sigma_2^2 = \frac{4}{12}$,...,$\sigma_n^2 = \frac{n^2}{12}$ então $s_n^2 = \frac{1}{12}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{72}$ logo $s_n = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{72}}$.

Assim podemos enunciar (um caso particular do) Teorema central do Limite para variáveis aleatórias que tem distribuição uniforme $[0,n]$ do seguinte modo.

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que X_n tem distribuição uniforme $[0,n]$, $\forall n$. Então

$$\frac{S_n - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{72}}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

4ªQUESTÃO: Suponha que $X_1, X_2, \ldots$ sejam variáveis aleatórias independentes tais que $\mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_n = n)$. Mostre que a sequência satisfaz o Teorema Central do Limite mas não obedece à Lei Forte dos Grandes Números.

Resolução: Como $X_1, X_2, \ldots$ são variáveis aleatórias independentes tais que $\mathbb{P}(X_n = -n) =$

$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_n = n)$, temos que $\mathrm{Var}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - [\mathbb{E}(X_n)]^2 = \mathbb{E}(X_n^2) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Daí temos que $s_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 = 1 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e a ordem de $\frac{1}{s_n^2}$ é $n^{-3-3\delta/2}$.

Como $\mathbb{E}(X_k) = \mu_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, chegamos que

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k - \mu_k|^{2+\delta} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|^{2+\delta} = \sum_{k=1}^{n} k^{2+\delta}$$

tem ordem $\delta + 3$.

Assim, temos que $\frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k - \mu_k|^{2+\delta}$ é da ordem de $n^{\frac{2\delta+6}{3\delta+6}}$. Daí para $\delta > 0$ temos

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k - \mu_k|^{2+\delta} = 0.$$

Logo satisfaz a condição de Liapunov e portanto o Teorema Central do Limite.

Suponha agora que $X_1, X_2, \ldots$ satisfaça à Lei Forte dos Grandes Números, daí temos

$$\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n)}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0 \quad q.c.,$$

no nosso caso teremos

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0 \quad q.c..$$

Observe também que

$$\frac{S_n}{n} = \frac{S_{n-1}}{n} + \frac{X_n}{n} = \begin{cases} \frac{S_{n-1}}{n} + 1 & \text{se} X_n = n \\ \frac{S_{n-1}}{n} - 1 & \text{se} X_n = -n, \end{cases}$$

mas $\left(\frac{S_{n-1}}{n} + 1\right) - \frac{S_{n-1}}{n-1} = \frac{S_{n-1}(n-1) + n(n-1) - (S_{n-1})n}{n(n-1)} = 1 - \frac{S_{n-1}}{n-1}$ e $\left(\frac{S_{n-1}}{n} - 1\right) - \frac{S_{n-1}}{n-1} = -1 - \frac{S_{n-1}}{n-1}$.

Como $\frac{-n(n-1)}{2} \leq S_{n-1} \leq \frac{n(n-1)}{2}$ então $\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} \geq \frac{1}{2}$ e $\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} \leq -\frac{1}{2}$ o que nos garante que $\frac{S_n}{n}$ não dá saltos menores que $1/2$ em módulo. Logo, para todo $< 0\varepsilon < \frac{1}{2}$ conseguimos mostrar que não existe $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$, donde concluímos que $X_1, X_2, \ldots$ não satisfaz a Lei dos Grandes Números.

9ªQUESTÃO: Seja $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3 \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, as X_n sendo identicamente distribuídas com distribuição $U[0,1]$ e as Y_n sendo identicamente distribuídas com distribuição $U[0,2]$. Seja S_n a soma dos n primeiros termos da sequência, de modo que $S_1 = X_1$, $S_2 = X_1 + Y_1$, $S_3 = X_1 + Y_1 + X_2$, etc.

(a) Mostre que $\frac{S_n}{n}$ converge quase certamente e ache o seu limite.

Resolução: Como $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ são independentes e integráveis com $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(Y_n) = 1$, $\mathrm{Var}(X_n) = \frac{1}{12}$ e $\mathrm{Var}(Y_n) = \frac{4}{12}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim temos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} + \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} \right) < 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

o que nos garante a validade da Lei Forte dos Grandes Números.

Daí se, n for par temos

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \frac{\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(Y_1) + \ldots + \mathbb{E}(Y_{\frac{n}{2}})}{n} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} + \frac{n}{2}}{n} = \frac{3}{4} \quad q.c..$$

Se, n for ímpar temos

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \frac{\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(Y_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_{\frac{n+1}{2}})}{n} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2}}{n} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \frac{3}{4} \quad q.c..$$

Concluímos, assim que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \frac{3}{4}$ quase certamente.

Questões de Sala

DIA 09/10/13: Sejam $f(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}$ e $g(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}$. Então $(f * g)(z) = \dfrac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ onde $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Resolução: Por definição temos que

$$\begin{aligned}(f*g)(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(z-y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma_1^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot \frac{e^{-\frac{(z-y)^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}\,dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}\cdot\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(z-y)^2}{2\sigma_2^2}}\,dy \\ &= \frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}\cdot\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{-2zy+y^2}{2\sigma_2^2}}\,dy \\ &= \frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}\cdot\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\sigma_2^2+\sigma_1^2)y^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}} \cdot e^{\frac{zy}{\sigma_2^2}}\,dy.\end{aligned}$$

Denotemos por simplicidade $k = \dfrac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}\cdot\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}$, $a = \frac{\sigma_2^2+\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}$ e $b = \frac{z}{\sigma_2^2}$. Assim,

$$\begin{aligned}(f*g)(z) &= \frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}\cdot\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\sigma_2^2+\sigma_1^2)y^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}} \cdot e^{\frac{zy}{\sigma_2^2}}\,dy \\ &= k\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ay^2}{2}+by}\,dy \\ &= k\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\sqrt{a}y)^2}{2}+\frac{b\sqrt{a}y}{\sqrt{a}}}\,dy.\end{aligned}$$

Tomando $u = \sqrt{a}y$ temos $du = \sqrt{a}dy$ e ficamos com

$$\begin{aligned}(f*g)(z) &= k\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\sqrt{a}y)^2}{2}+\frac{b\sqrt{a}y}{\sqrt{a}}}\,dy \\ &= \frac{k}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}+\frac{bu}{\sqrt{a}}}\,du. \qquad (1)\end{aligned}$$

Como $-\frac{u^2}{2} + \frac{bu}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2}(u-h)^2 + c$, onde $h = -\frac{b}{\sqrt{a}}$ e $c = \frac{b^2}{2a}$. Deste modo, podemos ainda reescrever (2) do seguinte modo

$$(f * g)(z) \;=\; \frac{k}{\sqrt{a}} e^{c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(u-h)^2}{2}}\, du$$

Assim, tomando $v = u - h$ temos $dv = du$ e portanto

$$(f * g)(z) \;=\; \frac{k}{\sqrt{a}} e^{c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv = \frac{k}{\sqrt{a}} e^{c} \sqrt{2\pi}$$

onde a ultima igualdade decorre do que já foi visto em sala, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv = \sqrt{2\pi}$. Daí temos que

$$\begin{aligned}
(f * g)(z) &= \sqrt{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2+\sigma_1^2}} \cdot \frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}\cdot\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{\frac{b^2}{2a}} \sqrt{2\pi} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_2^2+\sigma_1^2)}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}} e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{\sigma_2^4}\cdot\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_2^2+\sigma_1^2)}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}} e^{\frac{z^2\sigma_1^2}{2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_2^2+\sigma_1^2)}} \cdot e^{-\left(\frac{1}{\sigma_2^2}-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)\frac{z^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_2^2+\sigma_1^2)}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}},
\end{aligned}$$

com $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

DIA 09/10/13: Seja $f \in C_K^\infty(\mathbb{R})$. Então existe $C > 0$ tal que

$$g(h) = \sup_{x\in K}\left| f(x+h) - f(x) - f'(x)\cdot h - \frac{f''(x)\cdot h^2}{2}\right| \leq C \min\{|h|^2, |h|^3\}.$$

Resolução: Como $f \in C_K^\infty(\mathbb{R})$ temos pelo Teorema do Valor Médio que $f(x+h) - f(x) =$

$f'(x+\alpha h)\cdot h$, onde $\alpha \in (0,1)$. Assim, podemos reescrever

$$g(h) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| (f'(x+\alpha h) - f'(x))\cdot h - \frac{f''(x)\cdot h^2}{2} \right|.$$

Novamente pelo Teorema do Valor Médio temos que $f'(x+\alpha h) - f'(x) = f''(x+\beta h)\cdot \alpha h$, com $\beta \in (0,\alpha)$. E deste modo

$$\begin{aligned} g(h) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| (f'(x+\alpha h) - f'(x))\cdot h - \frac{f''(x)\cdot h^2}{2} \right| \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f''(x+\beta h)\cdot \alpha h^2 - \frac{f''(x)\cdot h^2}{2} \right| \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \left(f''(x+\beta h)\cdot \alpha - \frac{f''(x)}{2} \right)\cdot h^2 \right| \\ &\leq C_1 \cdot h^2 \end{aligned}$$

onde $C_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \left(f''(x+\beta h)\cdot \alpha - \frac{f''(x)}{2} \right) \right| < +\infty$ já que f tem suporte compacto, logo f'' também possui suporte compacto.

Por outro lado, usando a Fórmula de Taylor, com resto de Lagrange temos que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2!}\cdot h^2 + \frac{f'''(x+\theta\cdot h)}{3!}\cdot h^3,$$

assim, substituindo $f(x+h)$ por $f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2!}\cdot h^2 + \frac{f'''(x+\theta\cdot h)}{3!}\cdot h^3$ na definição de $g(h)$ obtemos

$$\begin{aligned} g(h) &= \sup_{x\in K} \left| f(x+h) - f(x) - f'(x)\cdot h - \frac{f''(x)\cdot h^2}{2} \right| \\ &= \sup_{x\in K} \left| f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2!}\cdot h^2 + \frac{f'''(x+\theta\cdot h)}{3!}\cdot h^3 - f(x) - f'(x)\cdot h - \frac{f''(x)\cdot h^2}{2} \right| \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{f'''(x+\theta\cdot h)}{3!}\cdot h^3 \right| \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{f'''(x+\theta\cdot h)}{3!} \right| \cdot |h|^3 \\ &\leq C_2 \cdot |h|^3. \end{aligned}$$

onde $C_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{f'''(x+\theta\cdot h)}{3!} \right| < +\infty$.

Assim, tomando $C = \max\{C_1, C_2\}$ temos que $g(h) \leq C \min\{|h|^2, |h|^3\}$ como queriamos demonstrar.

DIA 30/10/13: Prove o Teorema Central do Limite de Lindeberg: Sejam $X_{n,1}, \ldots, X_{n,k_n}$ independentes para cada n todas com média zero e $X_{n,j}$ com variância $0 < \sigma^2_{n,j} < +\infty$. Denote $s_n^2 = \sigma^2_{n,1} + \ldots + \sigma^2_{n,k_n}$, se $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{1}{s_n^2} \cdot \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}\left(X^2_{n,j} \mathbb{I}_{[|X_{n,j}| \geq \varepsilon s_n]}\right) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0,$$

então $\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{D} Y$, $Y \sim N(0,1)$, onde $S_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,k_n}$.

Resolução: Pelo Teorema de Portmanteau basta mostrarmos que, para toda $f \in C_k^\infty$ temos $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{s_n}\right)\right] \longrightarrow \mathbb{E}[f(Y)]$.

Sejam $Y_{n,1}, Y_{n,2}, \ldots, Y_{n,k_n}$, *i.i.d.* com distribuição normal $(0,1)$ e denote $Y = \frac{Y_{n,1}+Y_{n,2}+\ldots+Y_{n,k_n}}{s_n}$. Escrevendo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{s_n}\right)\right] - \mathbb{E}[f(Y)] &= \mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_{n,1}+\ldots+X_{n,k_n}}{s_n}\right)\right] - \mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y_{n,1}+\ldots+Y_{n,k_n}}{s_n}\right)\right] = \\
= \ & \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n} X_{n,j}}{s_n}\right) - f\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n-1} X_{n,j} + Y_{n,k_n}}{s_n}\right)\right] + \\
+ \ & \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n-1} X_{n,j} + Y_{n,k_n}}{s_n}\right) - f\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n-2} X_{n,j} + Y_{n,k_n-1} + Y_{n,k_n}}{s_n}\right)\right] + \qquad (2) \\
+ \ & \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n-2} X_{n,j} + Y_{n,k_n-1} + Y_{n,k_n}}{s_n}\right) - f\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n-3} X_{n,j} + Y_{n,k_n-2} + \ldots + Y_{n,k_n}}{s_n}\right)\right] + \\
+ \ & \ldots + \mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_{n,1} + Y_{n,2} + \ldots + Y_{n,k_n}}{s_n}\right) - f\left(\frac{Y_{n,1}+\ldots+Y_{n,k_n}}{s_n}\right)\right]
\end{aligned}$$

Observe que para a diferença em cada esperança podemos proceder de modo similar ao que faremos para (2). Chamemos $x = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n-1} X_{n,j}}{s_n}$, $h_1 = \frac{X_{n,k_n}}{s_n}$ e $h_2 = \frac{Y_{n,k_n}}{s_n}$ é usando a função g

definida no exercício anterior temos que

$$f(x+h_1)-f(x+h_2)-f'(x)(h_1-h_2)-\frac{f''(x)(h_1^2-h_2^2)}{2}\leq g(h_1)+g(h_2).$$

Assim temos que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[f(x+h_1)-f(x+h_2)]-\mathbb{E}[f'(x)(h_1-h_2)]-\mathbb{E}\left[\frac{f''(x)(h_1^2-h_2^2)}{2}\right]= \\
= \ & \mathbb{E}[f(x+h_1)-f(x+h_2)]-\mathbb{E}[f'(x)](\mathbb{E}[h_1]-\mathbb{E}[h_2]))-\mathbb{E}\left[f''(x)\right]\left(\frac{\mathbb{E}[h_1^2]-\mathbb{E}[h_2^2]}{2}\right) \\
= \ & \mathbb{E}[f(x+h_1)-f(x+h_2)]\leq \mathbb{E}[g(h_1)]+\mathbb{E}[g(h_2)].
\end{aligned}$$

Onde a ultima igualdade decorre de todas as $X_{n,j},\ j=1,\ldots,k_n$ tem média nula e são independentes.

Daí se mostrarmos que $\sum_{j=1}^{k_n}\left(\mathbb{E}[g(\frac{X_{n,j}}{s_n})]+\mathbb{E}[g(\frac{Y_{n,i}}{s_n})]\right)\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}0$ obtemos o que desejamos. Para ver que de fato isso ocorre, observe que como os $Y_{i's}$ são *i.i.d.* temos $\sum_{j=1}^{k_n}\mathbb{E}[g(\frac{Y_{n,j}}{s_n})]=k_n\mathbb{E}[g(\frac{Y_{n,1}}{s_n})]$ e podemos decompor

$$\mathbb{E}\left[g\left(\frac{X_{n,j}}{s_n}\right)\right]=\mathbb{E}\left[g\left(\frac{X_{n,j}}{s_n}\right)\mathbb{I}_{[|X_{n,j}|\geq\varepsilon s_n]}\right]+\mathbb{E}\left[g\left(\frac{X_{n,j}}{s_n}\right)\mathbb{I}_{[|X_{n,j}|<\varepsilon s_n]}\right],$$

pelo exercício anterior

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g\left(\frac{X_{n,j}}{s_n}\right)\mathbb{I}_{[|X_{n,j}|\geq\varepsilon s_n]}\right] &\leq K\cdot\mathbb{E}\left[\frac{X_{n,j}^2}{s_n^2}\mathbb{I}_{[|X_{n,j}|\geq\varepsilon s_n]}\right] \\
&= \frac{K}{s_n^2}\cdot\mathbb{E}\left[X_{n,j}^2\mathbb{I}_{[|X_{n,j}|\geq\varepsilon s_n]}\right]\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}0
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g\left(\frac{X_{n,j}}{s_n}\right)\mathbb{I}_{[|X_{n,j}|<\varepsilon s_n]}\right] &\leq K\cdot\mathbb{E}\left[\frac{|X_{n,j}|^3}{s_n^3}\mathbb{I}_{[|X_{n,j}|<\varepsilon s_n]}\right] \\
&= \frac{K}{s_n^2}\cdot\mathbb{E}\left[\frac{X_{n,j}^2\cdot|X_{n,j}|}{s_n}\mathbb{I}_{[|X_{n,j}|<\varepsilon s_n]}\right] \\
&\leq \frac{K}{s_n^2}\cdot\mathbb{E}\left[\frac{X_{n,j}^2\cdot\varepsilon s_n}{s_n}\right] \\
&\leq \frac{K\varepsilon}{s_n^2}\cdot\mathbb{E}\left[X_{n,j}^2\right]\leq\frac{K\varepsilon\sigma_{n,j}^2}{s_n^2},
\end{aligned}$$

onde a ultima desigualdade ocorre porque todas as $X_{n,j}$, $j = 1, \ldots, k_n$ tem média nula, logo $\mathrm{Var}(X_{n,j}) = \sigma^2_{n,j}$ e como o $\varepsilon > 0$ é qualquer, concluímos que $\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{D} Y$, $Y \sim N(0,1)$.

DIA 12/11/13: Como consequência dos Teoremas visto em sala temos que

$$F_n \longrightarrow F \ \text{ fracamente} \Longleftrightarrow X_n \xrightarrow{D} X \implies \varphi_{X_n}(t) \longrightarrow \varphi_X(t) \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

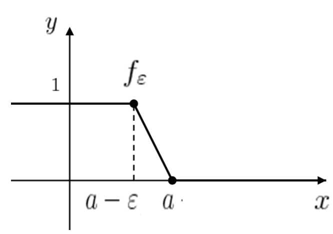
Resolução: Já vimos em sala que $F_n \longrightarrow F$ fracamente $\Longrightarrow X_n \xrightarrow{D} X$, então para a primeira parte resta mostrar que $X_n \xrightarrow{D} X \Longrightarrow F_n \longrightarrow F$ fracamente.

Sabendo que $X_n \xrightarrow{D} X$ então temos que $\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$, $\forall f \in C^\infty_b(\mathbb{R})$. Queremos mostrar que $F_n \longrightarrow F$ fracamente para todo x ponto de continuidade de F.

Seja a ponto de continuidade de F, escrevemos $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq a) = \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{(-\infty,a]}(X_n)\right]$. Considere agora

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ x \in (-\infty, a-\varepsilon) \\ \frac{-x+a}{\varepsilon} & \text{se } \ x \in [a-\varepsilon, a) \\ 0 & \text{se } \ x \in [a, +\infty) \end{cases}$$

para $\varepsilon > 0$ qualquer, ver figura abaixo.



Usando a desigualdade triangular temos que

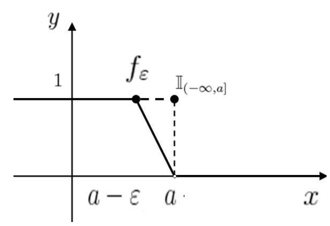
$$\begin{aligned} |F_n(a) - F(a)| &\leq \mathbb{E}\left|\mathbb{I}_{(-\infty,a]}(X_n) - f_\varepsilon(X_n)\right| + |\mathbb{E}[f_\varepsilon(X_n) - f_\varepsilon(X)]| \\ &+ E\left|\mathbb{I}_{(-\infty,a]}(X) - f_\varepsilon(X)\right|. \end{aligned}$$

Queremos mostrar que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno o primeiro e o terceiro fator da soma (acima) é menor que um $\delta > 0$, já que o 2º termo segue do fato de $X_n \xrightarrow{D} X$.

Observemos inicialmente o primeiro fator da soma, como

$$\mathbb{E}\left|\mathbb{I}_{(-\infty,a]}(X_n) - f_\varepsilon(X_n)\right| \leq \mathbb{E}[\mathbb{I}_{[a-\varepsilon,a]}(X_n)]$$

veja a figura abaixo.



Considere agora a função contínua dada por

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\infty, a-2\varepsilon] \cup (a+\varepsilon, +\infty) \\ \frac{x+2\varepsilon-a}{\varepsilon} & \text{se } x \in (a-2\varepsilon, a-\varepsilon) \\ 1 & \text{se } x \in (a-\varepsilon, a] \\ \frac{-x+a}{\varepsilon}+1 & \text{se } x \in (a, a+\varepsilon]. \end{cases}$$

Note que $g_\varepsilon(x) \geq \mathbb{I}_{(-\infty,x]}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, assim temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|\mathbb{I}_{(-\infty,a]}(X_n) - f_\varepsilon(X_n)\right| &\leq \mathbb{E}\left|\mathbb{I}_{[a-\varepsilon,a]}(X_n)\right| \\ &\leq \mathbb{E}[g_\varepsilon(X_n)] \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \mathbb{E}[g_\varepsilon(X)], \end{aligned}$$

já que $X_n \xrightarrow{D} X$. Além disso temos que $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} g_\varepsilon(x) = \mathbb{I}_{\{a\}}(x)$ e como a é ponto de continuidade de F temos que $\mathbb{P}(X=a)=0$, logo $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} g_\varepsilon(x) = 0$. Como $0 \leq g_\varepsilon(X_n) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$ concluímos pelo Teorema da Convergência Dominada que $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} \mathbb{E}(g_\varepsilon(x)) = 0$.

Assim, temos que para todo $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno que exite $\delta_1 > 0$ tal que $\mathbb{E}\left|\mathbb{I}_{(-\infty,a]}(X_n) - f_\varepsilon(X_n)\right| < \delta_1$.

Observemos agora o terceiro fator da soma, isto é, $E\left|\mathbb{I}_{(-\infty,a]}(X) - f_\varepsilon(X)\right|$.

Como $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} f_\varepsilon(x) = \mathbb{I}_{(-\infty,a)}(x)$ e sendo a ponto de continuidade de F temos que $\mathbb{P}(X = a) = 0$, logo $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} f_\varepsilon(x) = \mathbb{I}_{(-\infty,a]}(x)$ quase certamente e usando novamente o Teorema da

Convergência Dominada concluímos que

$$E\left|\mathbb{I}_{(-\infty,a]}(X) - f_\varepsilon(X)\right| \xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{} 0.$$

Daí, temos que para todo $\varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequeno existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$E\left|\mathbb{I}_{(-\infty,a]}(X) - f_\varepsilon(X)\right| < \delta_2.$$

Tomando portanto $\tilde{\varepsilon} = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ teremos

$$|F_n(a) - F(a)| \quad \leq \quad \delta_1 + \delta_2 + |\mathbb{E}[f_\varepsilon(X_n) - f_\varepsilon(X)]|,$$

sendo $f_{\tilde{\varepsilon}}$ contínua e limitada e sabendo $X_n \xrightarrow{D} X$ concluímos que

$$|\mathbb{E}[f_\varepsilon(X_n) - f_\varepsilon(X)]| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Portanto, $F_n \longrightarrow F$ fracamente para todo x ponto de continuidade de F.

Para a segunda parte ($X_n \xrightarrow{D} X \implies \varphi_{X_n}(t) \longrightarrow \varphi_X(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$) usamos o (falso) Teorema de Helly-Bray que afirma que se $X_n \xrightarrow{D} X \implies \int g(x)dF_{X_n}(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int g(x)dF(x)$ para toda função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada.

Como $\cos(tx)$ e $\operatorname{sen}(tx)$ são funções definidas em todo $\mathbb{R}$, contínuas e limitadas para t fixo, daí temos que $\mathbb{E}(\cos(tX_n)) = \int \cos(tx)dF_{X_n}(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int \cos(tx)dF(x) = \mathbb{E}(\cos(tX))$ e $\mathbb{E}(\operatorname{sen}(tX_n)) = \int \operatorname{sen}(tx)dF_{X_n}(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int \operatorname{sen}(tx)dF(x) = \mathbb{E}(\operatorname{sen}(tX))$, donde concluímos que $\varphi_{X_n}(t) \longrightarrow \varphi_X(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$.