UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - IM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PROFESSOR: TERTULIANO FRANCO
ALUNO: FELIPE FONSECA DOS SANTOS

TRABALHO DO CURSO DE PROBABILIDADE

Este trabalho consiste em resolver algumas questões selecionadas pelo professor Tertuliano, que em sua maioria foram retiradas do livro: "Probabilidade: um curso em nível intermediário", de Barry R. James.

Capítulo 1

1ªQUESTÃO: Sejam A, B e C eventos aleatórios. Identifique as seguintes equações e frases, casando cada equação expressa na notação de conjuntos com a correspondente frase na linguagem de eventos:

(a) $A \cap B \cap C = A \cup B \cup C$	(i) A e "$B \cap C''$são incompatíveis.
(b) $A \cap B \cap C = A$	(ii) Os eventos A, B e C são idênticos.
(c) $A \cup B \cup C = A$	(iii) A ocorrência de$A$ implica a de "B e C".
(d) $(A \cup B \cup C) \backslash (B \cup C) = A$	(iv) A ocorrência de A decorre de "B ou C".

Resolução: Analizando inicialmente o item (a), temos que $A \cap B \cap C \subset A \cup B \cup C$ para todo A, B e C. Por outro lado, $A \cup B \cup C \subset A \cap B \cap C$ significa que dado $x \in A \cup B \cup C$ temos $x \in A, B, C$, ou seja, os eventos A, B e C são idênticos (a ocorrência de um implica a ocorrência de todos), portanto $(a) \longleftrightarrow (ii)$.

Considere agora (b), sempre temos $A \cap B \cap C \subset A$, mas $A \subset A \cap B \cap C$ implica que dado $x \in A$ então $x \in B$ e $x \in C$. Logo a ocorrência de A implica a ocorrência de B e C, protanto $(b) \longleftrightarrow (iii)$.

Em (c) sempre ocorre que $A \subset A \cup B \cup C$, mas se $A \cup B \cup C \subset A$ isso implica que para qualquer $x \in B$ ou $x \in C$ temos $x \in A$. Assim, a ocorrência de A decorre de "B ou C". Ou seja, $(c) \longleftrightarrow (iv)$.

Por fim, considere o item (d), sabemos que sempre ocorre $(A \cup B \cup C)\backslash(B \cup C) \subset A$, ou seja, se $x \in (A \cup B \cup C)\backslash(B \cup C)$ então $x \notin (B \cup C)$, mas dado que $A \subset (A \cup B \cup C)\backslash(B \cup C)$ temos que para qualquer $x \in A$, $x \notin (B \cup C)$. Logo A e "$B \cap C''$ são incompatíveis, ou ainda $(d) \longleftrightarrow (i)$.

2ªQUESTÃO: A partir dos axiomas, prove a propriedade P5:

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Resolução: Considere,

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1 \\
B_2 &= A_2 \backslash A_1 \\
B_3 &= A_3 \backslash (A_2 \cup A_1) \\
&\vdots \\
B_n &= A_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}).
\end{aligned}$$

Como por construção os B_n são disjuntos dois a dois, temos pelo axioma 3' que $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n)$. Como $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, temos que

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

onde a ultima desigualdade ocorre devido ao fato de que para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset A_n$ e $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_n \cup (A_n - B_n)) = \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_n - B_n) \geq \mathbb{P}(B_n)$.

3ªQUESTÃO: Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos aleatórios. Mostre que

(a) $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k) \geq 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.

(b) Se $\mathbb{P}(A_k) \geq 1 - \varepsilon$ para $k = 1, \ldots, n$, então $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k) \geq 1 - n\varepsilon$.

(c) $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \geq 1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^c)$.

Resolução:

Item (a): Usando o axioma 4 temos que $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$. Considere $\Omega = (\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k) \cup (\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k^c)$. Assim, pelo axioma 2 temos que

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left((\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \cup (\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c)\right) \leq \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) + \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c) \leq \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k^c).$$

Portanto $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k) \geq 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k^c)$.

Item (b): Pelo item (a) temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) &\geq 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k^c) = 1 - \sum_{k=1}^{n}(1 - \mathbb{P}(A_k)) \\ &= 1 - n + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \geq 1 - n + \sum_{k=1}^{n}(1 - \varepsilon) = 1 - n\varepsilon. \end{aligned}$$

Item (c): Sabendo que $(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k)^c = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k^c$ e usando a 2º questão ficamos com $\mathbb{P}\left((\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k)^c\right) = \mathbb{P}(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k^c) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^c)$, como $\mathbb{P}\left((\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k)^c\right) = 1 - \mathbb{P}(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k)$ temos $1 - \mathbb{P}(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^c)$, ou seja, $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \geq 1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^c)$.

4ªQUESTÃO: Demonstre as seguintes propriedades:

(a) Se $\mathbb{P}(A_n) = 0$ para $n = 1, 2, ...$, então $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

(b) Se $\mathbb{P}(A_n) = 1$ para $n = 1, 2, ...$, então $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

Resolução:

Item (a): Como vimos na 2º questão $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$, sendo $\mathbb{P}(A_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$, pois é soma enumerável de zeros. Assim $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq 0$, logo $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

Item (b): Pela 3º questão item (c), $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \geq 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^c)$, como $\mathbb{P}(A_n) = 1$, então $\mathbb{P}(A_n^c) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^c) = 0$ (soma enumerável de zeros). Assim, $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \geq 1$ e portanto $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$, já que, $0 \leq \mathbb{P}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq 1$.

5ªQUESTÃO: Demonstre: Se $A_1, A_2, ...$ e $B_1, B_2, ...$ são eventos aleatórios do mesmo espaço de probabilidade tais que $\mathbb{P}(A_n) \longrightarrow 1$ e $\mathbb{P}(B_n) \longrightarrow p$ quando $n \longrightarrow +\infty$, então $\mathbb{P}(A_n \cap B_n) \longrightarrow p$.

Resolução: Começamos mostrando que se $\mathbb{P}(C_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a$ então $\mathbb{P}(C_n^c) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 1-a$. De fato, como $\mathbb{P}(C_n^c) = 1 - \mathbb{P}(C_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 1-a$.

Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap B_n \subset B_n$ assim $\mathbb{P}(A_n \cap B_n) \leq \mathbb{P}(B_n)$, logo $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B_n) \leq \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(B_n) = p$.

Por outro lado,

$$1 - \mathbb{P}(A_n \cap B_n) = \mathbb{P}((A_n \cap B_n)^c) = \mathbb{P}(A_n^c \cup B_n^c) \leq \mathbb{P}(A_n^c) + \mathbb{P}(B_n^c),$$

ou seja, $\mathbb{P}(A_n \cap B_n) \geq 1 - \mathbb{P}(A_n^c) - \mathbb{P}(B_n^c)$. Assim, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B_n) \geq \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 1 - \mathbb{P}(A_n^c) - \mathbb{P}(B_n^c) = 1 - 0 - (1-p) = p$. Portanto $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B_n) = p$.

8ªQUESTÃO: No jogo de CRAPS dois dados são jogados. Se o jogador tirar 7 ou 11 pontos ele ganha. Se ele tira 2,3 ou 12 ele perde. Nos outros casos ele contínua jogando os dois dados até sair 7, caso em que ele perde, ou então sair o primeiro resultado, caso em que ele ganha. Descreva o espaço amostral. Qual a probabilidade dele ganhar?

Resolução: Seja $\Omega = \{2, 3, 4, ..., 12\}^{\mathbb{N}}$ o espaço amostral e denote $X_i = k$ o valor k obtido na $i-$esima jogada, $i \in \mathbb{N}$ e $k \in \{2, 3, ..., 12\}$. Sabemos que $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 12) = 1/36$, $\mathbb{P}(X_1 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 11) = 2/36$, $\mathbb{P}(X_1 = 4) = \mathbb{P}(X_1 = 10) = 3/36$, $\mathbb{P}(X_1 = 5) = \mathbb{P}(X_1 = 9) = 4/36$, $\mathbb{P}(X_1 = 6) = \mathbb{P}(X_1 = 8) = 5/36$ e $\mathbb{P}(X_1 = 7)6/36$.

Como,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\}) &= \mathbb{P}\left(\{\text{ganhar}\} \bigcap_{k=4,5,6,7,8,9,10,11} \{X_1 = k\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=4,5,6,7,8,9,10,11} \{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = k\}\right) \\
&= \mathbb{P}(\{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = 7\}) + \mathbb{P}(\{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = 11\}) \\
&+ 2\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = 4\}) + 2\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = 5\}) \\
&+ 2\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = 6\})
\end{aligned}$$

Sabendo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\}\cap\{X_1=4\}) &= \mathbb{P}(\{\text{ganhar}\}|\{X_1=4\})\mathbb{P}(\{X_1=4\})\\
&= \mathbb{P}(\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\text{ganhar no } n\text{−esimo lançamento}\}|\{X_1=4\})\mathbb{P}(\{X_1=4\})\\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{36}\left(\frac{27}{36}\right)^{n-2}\right)\cdot\frac{3}{36}=\frac{1}{36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\}\cap\{X_1=5\}) &= \mathbb{P}(\{\text{ganhar}\}|\{X_1=5\})\mathbb{P}(\{X_1=5\})\\
&= \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\text{ganhar no } n\text{−esimo lançamento}\}|\{X_1=5\})\mathbb{P}(\{X_1=5\})\\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{36}\left(\frac{26}{36}\right)^{n-2}\right)\cdot\frac{3}{36}=\frac{16}{360}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\}\cap\{X_1=6\}) &= \mathbb{P}(\{\text{ganhar}\}|\{X_1=6\})\mathbb{P}(\{X_1=6\})\\
&= \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\text{ganhar no } n\text{−esimo lançamento}\}|\{X_1=6\})\mathbb{P}(\{X_1=6\})\\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-2}\right)\cdot\frac{5}{36}=\frac{25}{396}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\})=\frac{6}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{32}{36}+\frac{50}{396}=\frac{244}{495}$.

9ªQUESTÃO: Uma caixa contém $2n$ sorvetes, n do sabor A e n do sabor B. De um grupo de $2n$ pessoas, $a<n$ preferem o sabor A, $b<n$ o sabor B e $2n-(a+b)$ não tem preferência. Demonstre: se os sorvetes são distribuídos ao acaso a probabilidade de que a preferência de todas as pessoas seja respeitada é de

$$\binom{2n-a-b}{n-a}\Big/\binom{2n}{n}$$

Resolução: Ordenemos as primeiras $a+b$ pessoas de modo que as a primeiras prefiram o sabor A e as demais prefiram o sabor B.

Como a quantidade de sequências possíveis de distribuir o sorvete é de $C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}$ (número de caso possíveis).

Sabendo que o número de casos favoráveis deve satisfazer: sorvete de sabor A para as a

primeiras pessoas depois sorvete de sabor B para as b seguintes pessoas. Com isso restam apenas $2n-a-b$ pessoas a receber sorvete. Sendo que temos $(n-a)$ sorvetes de sabor A e $(n-b)$ sorvetes de sabor B. Assim o número de distribuição do sorvete sabor A é C_{2n-a-b}^{n-a}, assim a quantidade de distribuição para o sabor B nestas condições é de um único modo, daí temos.

$$\mathbb{P}(\text{Preferência Respeitada}) = \frac{C_{2n-a-b}^{n-a}}{C_{2n}^{n}}.$$

13ªQUESTÃO:

(a) Sejam A, B e C eventos aleatórios de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$. Mostre que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

e $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

(b) Enuncie a generalização do item (a) para o caso da união de n eventos aleatórios.

Resolução:

Item (a): Como $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ temos que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \backslash B) + \mathbb{P}(A \cap B)$, de modo análogo temos que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \backslash A) + \mathbb{P}(A \cap B)$, assim somando $\mathbb{P}(A)$ com $\mathbb{P}(B)$ temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \backslash B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \backslash A) + \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}((A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B).
\end{aligned}$$

Observe que a segunda igualdade decorre do fato de que os conjuntos $(A \backslash B), (B \backslash A)$ e $A \cap B$ são disjuntos. Assim, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Para a segunda parte do item (a) vamos usar o que já fizemos. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((A \cup B) \cup C) &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - (\mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

Item (b): Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos aleatórios de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$

então

$$\mathbb{P}(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)-\sum_{1=i<j}^{n}\mathbb{P}(A_i\cap A_j)+\sum_{1=i<j<k}^{n}\mathbb{P}(A_i\cap A_j\cap A_k)...+(-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$$

.

16ªQUESTÃO: Seja $(\Omega,\mathbb{A},\mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e suponha que todos os conjuntos abaixo pertençam a $\mathbb{A}$. Prove:

(a) Se os A_n são disjuntos e $\mathbb{P}(B|A_n)\geq c$ para todo n, então $\mathbb{P}(B|\cup A_n)\geq c$ (pode supor $\mathbb{P}(A_n)>0\ \forall n$).

(b) O item (a) com " $=$" no lugar de " $\geq$".

(c) Se $A_{n+1}\subset A_n$ e $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\leq\frac{1}{2}$ para todo n, então $\mathbb{P}(A_n)\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}0$.

(d) Se os A_n são disjuntos e $\mathbb{P}(B|A_n)=\mathbb{P}(C|A_n)\ \forall n$, então $\mathbb{P}(B|\cup A_n)=\mathbb{P}(C|\cup A_n)$.

(e) Se $A_1,A_2,...$ são disjuntos e $\cup A_n=\Omega$ então

$$\mathbb{P}(B|C)=\sum_n\mathbb{P}(A_n|C)\mathbb{P}(B|A_n\cap C).$$

Resolução:

Item (a): Como $\mathbb{P}(B|\cup A_n)=\dfrac{\mathbb{P}(B\cap(\cup A_n))}{\mathbb{P}(\cup A_n)}=\dfrac{\mathbb{P}(\cup(B\cap A_n))}{\mathbb{P}(\cup A_n)}=\dfrac{\sum\mathbb{P}(B\cap A_n)}{\mathbb{P}(\cup A_n)}$, onde a terceira igualdade vem do fato dos $A_{n's}$ serem disjuntos o que implica que os $B\cap A_{n's}$ são disjuntos. Além disso, temos que $\mathbb{P}(B|A_n)=\dfrac{\mathbb{P}(B\cap A_n)}{\mathbb{P}(A_n)}\geq c$ daí temos $\mathbb{P}(B\cap A_n)\geq c\mathbb{P}(A_n)$, assim

$$\mathbb{P}(B|\cup A_n)=\frac{\sum\mathbb{P}(B\cap A_n)}{\mathbb{P}(\cup A_n)}\geq\frac{\sum c\mathbb{P}(A_n)}{\sum\mathbb{P}(A_n)}=c.$$

Item (b): Vimos no item (a) que $\mathbb{P}(B|\cup A_n)=\dfrac{\sum\mathbb{P}(B\cap A_n)}{\mathbb{P}(\cup A_n)}$. Sendo $\mathbb{P}(B|A_n)=\dfrac{\mathbb{P}(B\cap A_n)}{\mathbb{P}(A_n)}=c$ então $\mathbb{P}(B\cap A_n)=c\mathbb{P}(A_n)$, logo

$$\mathbb{P}(B|\cup A_n)=\frac{\sum\mathbb{P}(B\cap A_n)}{\mathbb{P}(\cup A_n)}=\frac{\sum c\mathbb{P}(A_n)}{\sum\mathbb{P}(A_n)}=c.$$

Item (c): Note que $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)=\dfrac{\mathbb{P}(A_{n+1}\cap A_n)}{\mathbb{P}(A_n)}=\dfrac{\mathbb{P}(A_{n+1})}{\mathbb{P}(A_n)}\leq\dfrac{1}{2}$, daí $\mathbb{P}(A_{n+1})\leq\frac{\mathbb{P}(A_n)}{2}$, o que implica que, $\mathbb{P}(A_n)\leq\frac{\mathbb{P}(A_1)}{2^{n-1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, pois $\mathbb{P}(A_2)\leq\frac{\mathbb{P}(A_1)}{2}$, $\mathbb{P}(A_3)\leq\frac{\mathbb{P}(A_2)}{2}\leq\frac{\mathbb{P}(A_1)}{2^2},\cdots,\mathbb{P}(A_n)\leq\frac{\mathbb{P}(A_1)}{2^{n-1}}$.

Portanto, $\mathbb{P}(A_n) \leq \frac{\mathbb{P}(A_1)}{2^{n-1}} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, ou seja, $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, já que $\mathbb{P}(A_n) \geq 0$.

Item (d): Sabendo que $\mathbb{P}(B|A_n) = \mathbb{P}(C|A_n)$, temos para cada n que $\dfrac{\mathbb{P}(B \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_n)} = \dfrac{\mathbb{P}(C \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_n)}$, logo $\mathbb{P}(B \cap A_n) = \mathbb{P}(C \cap A_n)$.

Usando o fato de que os A_n são disjuntos e as propriedades de probabilidade temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B| \cup A_n) &= \frac{\mathbb{P}(\cup(B \cap A_n))}{\mathbb{P}(\cup A_n)} = \frac{\sum \mathbb{P}(B \cap A_n)}{\mathbb{P}(\cup A_n)} = \frac{\sum \mathbb{P}(C \cap A_n)}{\mathbb{P}(\cup A_n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\cup(C \cap A_n))}{\mathbb{P}(\cup A_n)} = \frac{\mathbb{P}(C \cap (\cup A_n))}{\mathbb{P}(\cup A_n)} = \mathbb{P}(C| \cup A_n).
\end{aligned}$$

Item (e): Sabemos que $\mathbb{P}(B|C) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)}$. Como os A_n são disjuntos e $\cup A_n = \Omega$ podemos escrever $B \cap C = (\cup A_n) \cap (B \cap C) = \cup(B \cap A_n \cap C)$ onde os $(B \cap A_n \cap C)$ são disjuntos para todo n. Deste modo $\mathbb{P}(B \cap C) = \sum_n \mathbb{P}(B \cap A_n \cap C) = \sum_n \mathbb{P}(B \cap A_n \cap C) = \sum_n \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A_n|C)\mathbb{P}(B|A_n \cap C)$, onde a ultima igualdade decorre do Teorema da Multiplicação. Portanto,

$$\mathbb{P}(B|C) = \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\sum_n \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A_n|C)\mathbb{P}(B|A_n \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \sum_n \mathbb{P}(A_n|C)\mathbb{P}(B|A_n \cap C)$$

17ªQUESTÃO: Suponha que a ocorrência ou não de chuva depende das condições do tempo no dia imediatamente anterior. Admita-se que se chove hoje choverá amanhã com probabilidade 0,7 e que se não chove hoje choverá amanhã com probabilidade 0,4. Sabendo-se que choveu hoje, calcule a probabilidade de que choverá depois de amanhã.

Resolução: Considere os seguintes eventos: C = {chover depois de amanhã}, A={chover amanhã} e N={não chove amanhã}. Assim queremos saber a probabilidade de $C = (A \cap C) \cup (N \cap C)$, logo $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(N \cap C)$. Mas $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C|A) = 0,7 \cdot 0.7 = 0.49$ e $\mathbb{P}(N \cap C) = \mathbb{P}(N) \cdot \mathbb{P}(C|N) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$, portanto $\mathbb{P}(C) = 0.49 + 0.12 = 0.61$.

21ªQUESTÃO: (De Fernadez[12]) Pedro quer enviar uma carta a Marina. A probabilidade de que Pedro escreva a carta é de 0.8. A probabilidade de que o correio não a perca é de 0.9. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de 0.9. Dado que Marina não recebeu a carta, qual a probabilidade condicional de que Pedro não tenha escrito?

Resolução: Considere os seguintes eventos: M = {Marina não recebeu a carta}, P={Pedro não escreveu a carta }, C={O correio perde a carta } e D={O carteiro não entrega a carta}. Assim queremos saber $\mathbb{P}(P|M) = \frac{\mathbb{P}(P\cap M)}{\mathbb{P}(M)}$, já temos que $\mathbb{P}(P \cap M) = \mathbb{P}(P) = 0,2$. Resta saber $\mathbb{P}(M)$,

Como $M = P \cup (\tilde{P} \cap C) \cup (\tilde{P} \cap \tilde{C} \cap D)$, onde $\tilde{P}$ representa a negação da sentença P. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M) &= \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(P \cap C) + \mathbb{P}(\tilde{P} \cap \tilde{C} \cap D) \\
&= \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(\tilde{P})\mathbb{P}(C|\tilde{P}) + \mathbb{P}(\tilde{P} \cap \tilde{C})\mathbb{P}(D|(\tilde{P} \cap \tilde{C})) \\
&= \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(\tilde{P})\mathbb{P}(C|\tilde{P}) + \mathbb{P}(\tilde{P})\mathbb{P}(\tilde{C}|\tilde{P})\mathbb{P}(D|(\tilde{P} \cap \tilde{C})) \\
&= 0.2 + 0.8 \cdot 0.1 + 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 0.352.
\end{aligned}$$

Portanto $\mathbb{P}(P|M) = \frac{0.2}{0.352}$.

Capítulo 2

1ªQUESTÃO: Seja X o número de caras obtidas em 4 lançamentos de uma moeda honesta. Desenhe o gráfico da função distribuição de X.

Resolução: Sejam $\Omega = \{(w_1, ..., w_4);\ w_i = \text{cara ou coroa},\ i = 1, ..., 4\}$ o espaço amostral e $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $X(w)$ =número de caras em $w = (w_1, ..., w_4)$ a variável aleatória. Assim $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ é a função de distribuição de X.

Como X é variável aleatória discreta temos que $[X \leq x] = \bigcup\limits_{i:x_i \leq x} [X = x_i]$, logo $F_X(x) = \sum\limits_{i:x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i)$. Calculando $\mathbb{P}(X = x_i)$ ficamos com, $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{16}$, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{4}{16}$, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{6}{16}$, $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{4}{16}$, $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{16}$, $\mathbb{P}(X < 0) = 0$ e $\mathbb{P}(X > 4) = 0$. Assim,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sum\limits_{i:x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i) & \text{se } x \in [0,4] \\ 1 & \text{se } x > 4 \end{cases} .$$

Portanto o gráfico de F_X é:

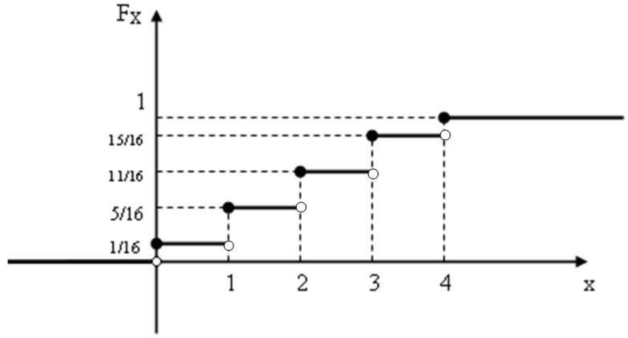

Figura 1: Gráfico de F_X

2ªQUESTÃO: Um ponto é selecionado ao acaso, do quadrado unitário $[0,1] \times [0,1]$. Seja X a primeira coordenada do ponto selecionado. Faça o gráfico da função de distribuição de X.

Resolução: Seja $\Omega = \{\omega = (x,y);\ 0 \leq x, y \leq 1\}$ o espaço amostral e considere $X : \Omega \longrightarrow [0,1]$ dado por $X(\omega) = x$.

Como $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ temos para $x > 1$ que $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1$ e para $x < 0$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Como $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \frac{x-0}{1-0} = x$ para $0 \leq x \leq 1$. Portanto

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \in [0,1] \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Logo o gráfico de F_X é:

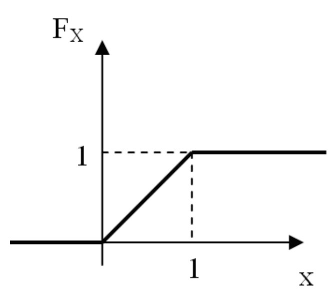

Figura 2: Gráfico de F_X

3ªQUESTÃO: Se adotássemos $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$ como definição da função de distribuição de X, qual seria a distinção entre o gráfico de F_{X_t} e o desenhado no §2.1? Haveria alguma mudança na função de distribuição de T_1 no mesmo exemplo?

Resolução: A distinção entre o gráfico de F_{X_t} e o desenhado no §2.1 é que F_{X_t} é contínua a esquerda ao contrário do que ocorre no §2.1, onde ele é contínuo à direita, ou seja, os degrais seriam fechado à direita e abertos à esquerda.

No caso da função de distribuição de $T_1 := \sup\{t; \omega(t) = 0\}$ temos que no §2.1

$$F_{T_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

e adotando $\bar{F}(t) = \mathbb{P}(X < t)$ vamos ter $\mathbb{P}(T_1 < t) = 0\ \forall t \leq 0$ e $\mathbb{P}(T_1 < t) = 1 - e^{-\lambda t}\ \forall t > 0$. Daí temos que

$$\bar{F}_{T_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Portanto $\bar{F}_{T_1}(t) = F_{T_1}(t)$, já que $\bar{F}_{T_1}(0) = F_{T_1}(0)$. Logo o gráfico é o mesmo.

5ªQUESTÃO: Suponha que a vida útil de certo tipo de lâmpada tenha distribuição exponencial com parâmetro λ.

(a) (Falta de memória da distribuição exponencial) Seja T a vida de uma lâmpada desse tipo. Mostre que

$$\mathbb{P}(T > t + s) = \mathbb{P}(T > s).$$

(b) Suponha que $\lambda = 3$ quando a vida é expressa em dias. Uma lâmpada solitária é ligada em uma sala no instante $t = 0$. Um dia depois, você entra na sala e fica ali durante 8 horas, saindo no final desse período.

(i) Qual a probabilidade de que você entre na sala quando já está escura?

(ii) Qual a probabilidade de você entrar na sala com a lâmpada ainda acesa e sair da sala depois da lâmpada queimar?

(iii) Dado que a lâmpada estava acesa quando você entrou. Qual a probabilidade de você sair com a luz apagada?

Resolução:

Item (a): Como a distribuição é exponencial então

$$F_T(t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}|_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$$

e $\mathbb{P}(T > t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$. Daí temos

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \frac{\mathbb{P}(T > t + s, T > t)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{\mathbb{P}(T > t + s)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(T > s).$$

Item (b,i): Sabendo que T é expresso em dias, desejamos saber qual a probabilidade da vida útil da lâmpada ser menor ou igual a um dia, ou seja,

$$\mathbb{P}(T \leq 1) = \int_0^t 3e^{-3x} dx = -e^{-3x}|_0^t = 1 - e^{-3}.$$

Item (b,ii): Como entramos na sala um dia depois e permanecemos na sala durante oito horas, ou seja, $\frac{1}{3}$ do dia, logo devemos calcular a probabilidade da lâmpada queimar depois de um dia e antes de um dia somado com $\frac{1}{3}$ de dia, logo

$$\mathbb{P}(1 < T \leq \frac{4}{3}) = \int_1^{\frac{4}{3}} 3e^{-3x} dx = -e^{-3x}|_1^{\frac{4}{3}} = -e^{-4} + e.$$

Item (b,ii): Pela letra (a) temos que a distribuição exponencial não tem memória, assim

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \leq \frac{4}{3} | T > 1) &= 1 - \mathbb{P}(T > \frac{1}{3} + 1 | T > 1) = 1 - \mathbb{P}(T > \frac{1}{3}) = \mathbb{P}(T \leq \frac{1}{3}) \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} 3e^{-3x} dx = -e^{-3x}|_0^{\frac{1}{3}} = 1 - e^{-1} \end{aligned}$$

6ªQUESTÃO: Seja X uma variável aleatória com densidade

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante c.

(b) Ache o valor α tal que $F_X(\alpha) = \frac{1}{4}$ (α é o primeiro quartil da distribuição de X.)

Resolução:

Item (a): Sendo f a densidade de X temos que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, mas

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{1} cx^2 dx = \frac{2c}{3}.$$

Assim, $\frac{2c}{3} = 1$, portanto $c = \frac{3}{2}$.

Item (b): Como $F_X(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} f(x)dx = \frac{1}{4}$ temos que

$$\int_{-1}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-1}^{\alpha} \frac{3}{2}x^2 dx = \frac{\alpha^3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

assim, $\alpha^3 = -\frac{1}{2}$ então $\alpha = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

7ªQUESTÃO: Uma variável aleatória X tem função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 1 \\ x^3 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Qual e a densidade de X?

Resolução: Como F é contínua, X tem densidade. Assim a densidade de X é,

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1 \\ 3x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Os valores f nos pontos 0 e 1 é arbitrário, pois qualquer que seja $f(0)$ (ou $f(1)$) a integral $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ é ainda igual a $F(x)$.

10ªQUESTÃO: Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, qual a distribuição da variável aleatória $y = \min(\lambda, X)$? Faça a decomposição de F_Y.

Resolução: Como X tem distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ sabemos que

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

é densidade de X.

Vamos agora encontrar a distribuição de $Y = \min(\lambda, X)$. Como $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$, temos:

- Para $t \geq \lambda$ temos $\mathbb{P}(Y \leq t) = 1$.
- Para $t < 0$, $\mathbb{P}(Y \leq t) = 0$.
- Para $0 \leq t < \lambda$ temos

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \lambda e^{-\lambda s} ds = \int_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda s} ds = -e^{-\lambda s}|_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$$

Portanto, $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{se } 0 \leq t < \lambda \\ 1 & \text{se } t \geq \lambda \end{cases}$. Vamos agora decompor F_Y.

Como F_Y tem apenas um salto em $t = \lambda$ e $P_1 =$ salto no ponto $\lambda = 1 - e^{-\lambda^2}$. Sabendo que $F_d(t) = F(t) - F(t^-)$, logo

$$F_d(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \lambda \\ e^{-\lambda^2} & \text{se } t \geq \lambda. \end{cases}$$

Calculando agora a derivada de F_Y obtemos a densidade de Y,

$$f(t) = F'_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \text{ ou } t \geq \lambda \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{se } t \in (0, \lambda). \end{cases}$$

Assim, $F_{ab}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \lambda \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{se } 0 < t \leq \lambda \\ 1 - e^{-\lambda^2} & \text{se } t > \lambda \end{cases}$. Por fim, temos $F_s = F_Y - F_{ab} - F_d = 0$. Portanto $F_Y = F_{ab} + F_d$.

Capítulo 3

6ªQUESTÃO: Um jogador vai lançar uma moeda honesta. Ele para depois de lançar ou duas caras sucessivas ou duas coroas sucessivas. Qual a esperança do número de lançamentos?

Resolução: Seja X a variável aleatória dada pelo número caras e coroas observadas. Assim, temos que X é discreta, então $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$, onde k é o número de lançamentos. Como a probabilidade de ganhar jogando a moeda apenas uma vez é nula, temos $\mathbb{P}(X = 1) = 0$, sabendo que a probabilidade de ganhar jogando a moeda apenas duas vezes é duas vezes a probabilidade de tirar duas caras (ou duas coroas), logo $\mathbb{P}(X = 2) = 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, procedendo assim temos que $\mathbb{P}(X = 3) = 2\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X = 4) = 2\frac{1}{16} = \frac{1}{8}, \cdots, \mathbb{P}(X = k) = 2\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 1$. Então

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = 0 + \sum_{k=2}^{+\infty} k \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{1}{2^{k-1}} - 1 = \left(\frac{1}{1-(1/2)}\right)^2 - 1 = 3.$$

Observe que a penúltima igualdade ocorre, já que, para $0 < \alpha < 1$ temos $\frac{1}{1-\alpha} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha^k$, e como a série de pontências $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha^k$ pode ser derivada termo a termo qualquer número de vezes então, derivando uma vez ambos os lados ficamos com $\frac{1}{(1-\alpha)^2} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\alpha^{k-1}$.

8ªQUESTÃO: Sejam X e Y variáveis aleatórias. Se $F_X(x) \leq F_Y(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, dizemos que X é estocasticamente maior que Y. Prove que se X é estocasticamente maior que Y, então $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$ (se existem $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbb{E}(Y)$).

Resolução: Se X é estocasticamente maior que Y temos que $F_X(x) \leq F_Y(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo $1 - F_X(x) \geq 1 - F_Y(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, assim se $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbb{E}(Y)$ existem,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x)dx \geq \int_0^{+\infty} (1 - F_Y(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x)dx \\
&\geq \int_0^{+\infty} (1 - F_Y(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F_Y(x)dx = \mathbb{E}(Y).
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

11ªQUESTÃO: Jogadores I e II têm 200,00 reais cada um. Lança-se uma moeda com probabilidade p de dar cara ($0 < p < 1$). Se der cara, o jogador I recebe 100,00 reais do II; se der coroa, I paga 100 ao II. Continua-se lançando a moeda independentemente, até um dos jogadores perder tudo, isto é, até um deles ficar com os 400,00 reais. Determine $\mathbb{E}(N)$, onde N é o número de lançamentos até terminar o jogo.

Resolução: Como cada jogador perde ou ganha 100 a cada rodada temos que $\mathbb{P}(N=0) = \mathbb{P}(N=1) = 0$. Além disso, se $k > 1$ for ímpar também teremos $\mathbb{P}(N=k) = 0$, pois cada jogador recebeu 200,00 reais e pelas regras se $k > 1$ for ímpar temos que os dois jogadores já ganhou e já perdeu em alguma das rodadas, suponha por absurdo que um dos jogadores ganhou 400,00 na $k-$esima jogada, $k > 1$ ímpar, seja ele o jogador I, como I perdeu em digamos $0 < a < k$ lançamentos, temos que I deve ter ganho em $a+2$ lançamentos para sair vitorioso, assim $k = 2a+2$ é par, absurdo. Logo os jogadores só podem ganhar em um número par de lançamentos.

Assim $N \in \{2, 4, 6, ...\}$ e calculando:

- Para $N = 2$ temos, $\mathbb{P}(N=2) = (1-p)^2 + p^2$;
- Para $N = 4$ temos, $\mathbb{P}(N=4) = 2(p(1-p)^3 + (1-p)p^3)$;
- Para $N = 6$ temos, $\mathbb{P}(N=6) = 4(p^2(1-p)^4 + (1-p)^2p^4)$
- Para $N = 8$ temos, $\mathbb{P}(N=8) = 8(p^3(1-p)^5 + (1-p)^3p^5)$;
- Para $N = 2n$ temos, $\mathbb{P}(N=2n) = 2^{n-1}(p^{n-1}(1-p)^{n+1} + (1-p)^{n-1}p^{n+1})$.

Como $\mathbb{E}(N) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 2k \cdot \mathbb{P}(N=2k)$ ficamos com,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \sum_{k=1}^{+\infty} 2k \cdot 2^{n-1}(p^{n-1}(1-p)^{n+1} + (1-p)^{n-1}p^{n+1}) \\
&= 2\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot 2^{n-1}((1-p)^{n-1}p^{n-1})((1-p)^2 + p^2) \\
&= 2((1-p)^2 + p^2)\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot (2(1-p)p)^{n-1}
\end{aligned}$$

reescrevendo o somatório,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot(2(1-p)p)^{n-1} &= 1+2(2(1-p)p)+3(2(1-p)p)^2+\cdots \\
&= 1+ \\
&+ (2(1-p)p)+(2(1-p)p)+ \\
&+ (2(1-p)p)^2+(2(1-p)p)^2+(2(1-p)p)^2+ \\
&+ \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Assim, somando por colunas temos em cada coluna progressão geométrica de razão maior que zero e menor que um. Daí

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot(2(1-p)p)^{n-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty}(2(1-p)p)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(2(1-p)p)^{n+1}+\cdots \\
&= \frac{1}{1-2(1-p)p}+\frac{2(1-p)p}{1-2(1-p)p}+\frac{(2(1-p)p)^2}{1-2(1-p)p}+\cdots \\
&= \frac{1}{1-2(1-p)p}\left(1+2(1-p)p+(2(1-p)p)^2+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{1-2(1-p)p}\left(\frac{1}{1-2(1-p)p}\right)=\frac{1}{(1-2(1-p)p)^2}
\end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{E}(N)=2((1-p)^2+p^2)\sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot(2(1-p)p)^{n-1}=2((1-p)^2+p^2)\cdot\frac{1}{(1-2(1-p)p)^2}=\frac{2((1-p)^2+p^2)}{(1-2(1-p)p)^2}$.

19ªQUESTÃO: Suponha que a variável aleatória X tenha a seguinte densidade "*triangular*"

$$f(t)=\begin{cases} 1+x & \text{se } -1\le x\le 0 \\ 1-x & \text{se } 0<x\le 1 \\ 0 & \text{se } x<-1 \text{ ou } x>1. \end{cases}$$

Calcule $\mathbb{E}(X)$ e $\text{var}(X)$.

Resolução: Como f é densidade de X temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} xf(x)dx + \int_{-1}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{1} xf(x)dx + \int_{1}^{+\infty} xf(x)dx \\
&= 0 + \int_{-1}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{1} xf(x)dx + 0 = \int_{-1}^{0} x(1+x)dx + \int_{0}^{1} x(1-x)dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} = 0
\end{aligned}$$

Sabendo que $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2)$ temos que

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) = \int x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)dx = \frac{1}{6}.$$

20ªQUESTÃO:

a) Prove que se a variável aleatória X é limitada, então tem momentos finitos de toda ordem.

b) Seja A um evento aleatório. Calcule todos os momentos absolutos da variável aleatória $X = \mathbb{I}_A$.

c) Demonstre: se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então todos os momentos absolutos de X são finitos.

d) Seja $X \sim \mathrm{Cauchy}(0,1)$. Quais são os momentos absolutos finitos de x?

Resolução:

Item (a): De fato, como X é limitada então existe $M > 0$ tal que $|X| < M$. Assim para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $|X|^n < M^n$, portanto $\mathbb{E}(|X|^n) \leq \mathbb{E}(M^n) = M^n < +\infty$. Logo X tem momentos finitos de toda ordem.

Item(b): Como $X \geq 0$, temos que $|X| = X$, além disso X é definhada como 1 se $x \in A$ e 0 caso contrário, logo $|X|^k = |X| = X$, daí temos que $\mathbb{E}(|X|^k) = \mathbb{E}(X) = \int \mathbb{I}_A d\mathbb{P} = \mathbb{P}(X = A)$.

Item(c): Como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ temos que X tem densidade $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$. Seja $k \in \mathbb{N}$ então,

$$\mathbb{E}|X|^k = \int |x|^k f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int |x|^k e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx, \tag{1}$$

considerando $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$ temos $dx = \sigma dt$ e (1) pode ser reescrito como

$$\mathbb{E}|X|^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int |x|^k e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int |\sigma t+\mu|^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int (\sigma|t|+|\mu|)^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \quad (2)$$

Como, $(\sigma|t|+|\mu|)^k = C_0^k(\sigma|t|)^k + C_1^k(\sigma|t|)^{k-1}|\mu| + C_2^k(\sigma|t|)^{k-2}|\mu|^2 + \cdots + C_{k-1}^k(\sigma|t|)|\mu|^{k-1} + C_k^k|\mu|^k$, assim

$$\mathbb{E}|X|^k \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(C_0^k\int(\sigma|t|)^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int C_1^k(\sigma|t|)^{k-1}|\mu| e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \cdots + C_k^k\int |\mu|^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right).$$

Sabendo que $\int(\sigma|t|)^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sigma^k\int |t|^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, logo se $\int |t|^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt < +\infty$ então $\int |t|^n e^{-\frac{t^2}{2}}dt < +\infty$ $\forall n \leq k$. Desse modo vamos nos consentrar apenas na $\int |t|^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, como $\int |t|^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \int\limits_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \int\limits_{-\infty}^{0} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, basta então calcular a $\int t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Usando o método de integração por partes, chamando $u = t^{k-1}$ e $dv = te^{-\frac{t^2}{2}}dt$ temos $du = (k-1)t^{k-2}dt$ e usando substituição simples chegamos que $v = -e^{-\frac{t^2}{2}}$, logo

$$\int t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt = -t^{k-1}e^{-\frac{t^2}{2}} + (k-1)\int t^{k-2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Se $k = 3$, $\int t^{k-2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = -e^{-\frac{t^2}{2}}$, caso $k > 3$ usamos novamente integração por partes, $u = t^{k-3}$ e $dv = te^{-\frac{t^2}{2}}dt$ temos $du = (k-3)t^{k-4}dt$ e $v = -e^{-\frac{t^2}{2}}$, daí

$$(k-1)\int t^{k-2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = (k-1)\left(-t^{k-3}e^{-\frac{t^2}{2}} + (k-3)\int t^{k-4}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right).$$

Assim, $\int t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt = -t^{k-1}e^{-\frac{t^2}{2}} - (k-1)t^{k-3}e^{-\frac{t^2}{2}} + (k-1)(k-3)\int t^{k-4}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Daí se $k = 5$ temos $\int t^{k-4}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = -e^{-\frac{t^2}{2}}$, caso contrário continuamos integrando por partes e ficaremos com

$$\int t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \begin{cases} -t^{k-1}e^{-\frac{t^2}{2}} - (k-1)t^{k-3}e^{-\frac{t^2}{2}} - \cdots - (k-1)(k-3)\cdots 2e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{se } k \text{ for ímpar;} \\ -t^{k-1}e^{-\frac{t^2}{2}} - (k-1)t^{k-3}e^{-\frac{t^2}{2}} - \cdots - (k-1)(k-3)\cdots 1\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt & \text{se } k \text{ for par.} \end{cases}$$

como $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1$ então $\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$, assim para k ímpar teremos

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt &= -t^{k-1}e^{-\frac{t^2}{2}}|_0^{+\infty} - (k-1)t^{k-3}e^{-\frac{t^2}{2}}|_0^{+\infty} - \cdots - (k-1)(k-3)\cdots 2e^{-\frac{t^2}{2}}|_0^{+\infty}\\ &= (k-1)(k-3)\cdots 2 < +\infty.\end{aligned}$$

e para k par temos

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt &= -t^{k-1}e^{-\frac{t^2}{2}}|_0^{+\infty} - (k-1)t^{k-3}e^{-\frac{t^2}{2}}|_0^{+\infty} - \cdots - (k-1)(k-3)\cdots 1\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\\ &= -(k-1)(k-3)\cdots 1\frac{\sqrt{2\pi}}{2} < +\infty.\end{aligned}$$

Para $\int\limits_{-\infty}^{0} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ fazemos a mesma análise e teremos que $\int\limits_{-\infty}^{0} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt < +\infty$. Portanto, $\mathbb{E}|X|^k < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Item (d): Como $X \sim \text{Cauchy}(0,1)$ então X possui densidade dada por $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Assim, tomando inicialmente $k = 1$ temos que

$$\mathbb{E}|X| = \int \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)}dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{x}{(1+x^2)}dx.$$

Como $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(u)$ temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X| &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)|_0^{+\infty} - \frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)|_{-\infty}^{0} = +\infty\end{aligned}$$

Deste modo concluímos que X não possue momentos absolutos finitos, pois caso houvesse, esse obrigaria a $\mathbb{E}|X| < +\infty$.

23ªQUESTÃO: Prove que se X assume valores no intervalo $[a,b]$, então $a \leq \mathbb{E}(X) \leq b$ e $\text{var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$. (sugestão: faça primeiro para $a = 0$ e $b = 1$). Exiba uma variável aleatória que atinge variância máxima.

Resolução: Como $a \leq X \leq b$ então $a = \mathbb{E}(a) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(b) = b$. Note agora que

$\text{var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$, pois sabemos que a função $f(c) = \mathbb{E}(X-c)^2$ tem mínimo em $c = \mathbb{E}(X)$, logo

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 \leq \mathbb{E}\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \mathbb{E}\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4}. \end{aligned}$$

Para a variável aleatória que atinge variância máxima, considere X assumindo valores no intervalo $[0,1]$ e $X \sim \text{Bernoulli}(1/2)$, temos que

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{(1-0)^2}{4}.$$

24ªQUESTÃO: Calcule a variância da variável aleátoria X, sob as seguintes condições:
(a) $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, onde $\lambda > 0$.
(b) $X \sim b(n,p)$, onde $0 < p < 1$.

Resolução:

Item (a): Sabendo que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ então $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = \lambda.$$

Por outro lado, $\mathbb{E}(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!}$, tomando $t = k-1$ temos,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{t=0}^{+\infty}(t+1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{t+1}}{t!} = \sum_{t=0}^{+\infty} t\frac{e^{-\lambda}\lambda^{t+1}}{t!} + \sum_{t=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{t+1}}{t!} \\ &= \lambda\sum_{t=0}^{+\infty} t\frac{e^{-\lambda}\lambda^t}{t!} + \lambda e^{-\lambda}\sum_{t=0}^{+\infty}\frac{\lambda^t}{t!} = \lambda\lambda + \lambda = \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

Portanto, $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Item (b): Seja $X_i = \text{Bernoulli}(p)$, $i = 1, ..., n$ independentes. Assim, (ver questão 30°) $X \overset{d}{=} X_1 + \cdots + X_n$, logo $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) = n\mathbb{E}(X_1) = np$. Como os X_i são independentes $\text{var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \text{var}(X_i) = n\text{var}(X_1)$. Sabendo que

$$\text{var}(X_1) = \mathbb{E}(X_1)^2 - (\mathbb{E}(X_1))^2 = \mathbb{E}(X_1)^2 - p^2 = \mathbb{E}(X_1) - p^2 = p - p^2$$

onde a penúltima igualdade decorre do fato de X assumir apenas valor 0 ou 1, logo X^2 também só assumirá valor 0 ou 1, logo $\mathbb{E}(X_1)^2 = \mathbb{E}(X_1)$.

26ªQUESTÃO:

(a) Sejam X e Y variáveis aleatórias que só assumem os valores 0 e 1. Mostre que se $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, então X e Y são independentes.

(b) Prove: Se X assume apenas valores a e b, Y assume apenas os valores c e d e $\text{cov}(X, Y) = 0$, então X e Y são independentes.

Resolução:

Item (a): Sabendo que X e Y só assumem os valores 0 e 1, temos que as $\sigma-$álgebras de gerada por X e Y são $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ e $\sigma(Y) = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$, onde A e B são os conjuntos onde X e Y respectivamente assume apenas valor 1. Deste modo,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Ademais, sabendo que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ temos que $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$, $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$ e $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$, já que, $A \cap B^c = A - A \cap B$ então

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A - (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$$

De modo análogo mostra-se que $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$ e como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A^c \cap B^c) &= \mathbb{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) \\ &= \mathbb{P}(A^c)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c) \end{aligned}$$

Concluímos que X e Y são independentes, já que para o $\emptyset$ e Ω o resultado é sempre válido.

Item (b): Sabendo que X assume apenas valores a e b e que Y assume apenas valores c e d, temos que as $\sigma-$álgebras gerada por X e Y são: $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ e $\sigma(Y) = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$, onde X assume valor a em A e b em A^c e Y assume valor c em B e d em B^c.

Assim, $X = a\mathbb{I}_A + b\mathbb{I}_{A^c}$ e $Y = c\mathbb{I}_B + d\mathbb{I}_{B^c}$ e portanto,

$$XY = (a\mathbb{I}_A + b\mathbb{I}_{A^c})(c\mathbb{I}_B + d\mathbb{I}_{B^c}) = ac\mathbb{I}_{A\cap B} + ad\mathbb{I}_{A\cap B^c} + bc\mathbb{I}_{A^c\cap B} + bd\mathbb{I}_{A^c\cap B^c}.$$

Ademais, como $\text{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$ então $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Daí, por um lado temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= ac\mathbb{E}(\mathbb{I}_{A\cap B}) + ad\mathbb{E}(\mathbb{I}_{A\cap B^c}) + bc\mathbb{E}(\mathbb{I}_{A^c\cap B}) + bd\mathbb{E}(\mathbb{I}_{A^c\cap B^c}) \\
&= ac\mathbb{P}(A\cap B) + ad\mathbb{P}(A\cap B^c) + bc\mathbb{P}(A^c\cap B) + bd\mathbb{P}(A^c\cap B^c) \\
&= ac\mathbb{P}(A\cap B) + ad\mathbb{P}(A-(A\cap B)) + bc\mathbb{P}(B-(A\cap B)) + bd\mathbb{P}(A\cup B)^c \\
&= ac\mathbb{P}(A\cap B) + ad\mathbb{P}(A) - ad\mathbb{P}(A\cap B)) + bc\mathbb{P}(B) - bc\mathbb{P}(A\cap B) + bd(1-\mathbb{P}(A\cup B)) \\
&= (ac-ad-bc)\mathbb{P}(A\cap B) + ad\mathbb{P}(A) + bc\mathbb{P}(B) + bd(1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A\cap B)) \\
&= (ac-ad-bc+bd)\mathbb{P}(A\cap B) + ad\mathbb{P}(A) + bc\mathbb{P}(B) + bd - bd\mathbb{P}(A) - bd\mathbb{P}(B) \qquad (3)
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(a\mathbb{I}_A + b\mathbb{I}_{A^c})\mathbb{E}(c\mathbb{I}_B + d\mathbb{I}_{B^c}) = [a\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) + b\mathbb{E}(\mathbb{I}_{A^c})][c\mathbb{E}(\mathbb{I}_B) + d\mathbb{E}(\mathbb{I}_{B^c})] \\
&= ac\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + ad\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) + bc\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B) + bd\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c) \\
&= ac\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + ad\mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B)) + bc(1-\mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) + bd(1-\mathbb{P}(A))(1-\mathbb{P}(B)) \\
&= (ac-ad-bc+bd)\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + ad\mathbb{P}(A) + bc\mathbb{P}(B) + bd - bd\mathbb{P}(A) - bd\mathbb{P}(B) \qquad (4)
\end{aligned}$$

De (3) e (4) temos que $(ac-ad-bc+bd)\mathbb{P}(A\cap B) = (ac-ad-bc+bd)\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Como $(ac-ad-bc+bd) = (a-b)(c-d)$ e $a \neq b$ e $c \neq d$ temos que $(a-b)(c-d) \neq 0$, logo $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Usando o que fizemos na letra (a) concluímos que $\mathbb{P}(A\cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$, $\mathbb{P}(A^c\cap B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$ e $\mathbb{P}(A^c\cap B^c) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$, ou seja, X e Y são independentes, já que para o $\emptyset$ e Ω o resultado é sempre válido.

28ªQUESTÃO: Se X e Y são variáveis aleatórias independentes com variâncias finitas.

Demonstre que

$$\mathrm{var}(XY) = \mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y) + (\mathbb{E}(X))^2\mathrm{var}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2\mathrm{var}(X).$$

Resolução: Por um lado, usando a independência das variáveis aleatórias temos

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(XY) &= \mathbb{E}(XY)^2 - (\mathbb{E}(XY))^2 = \mathbb{E}(X^2Y^2) - (\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(X))^2(\mathbb{E}(Y))^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} & \mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y) + (\mathbb{E}(X))^2\mathrm{var}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2\mathrm{var}(X) \\ = \; & (\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2)(\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2) + \mathbb{E}(X)^2(\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2) + \mathbb{E}(Y)^2(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2) \\ = \; & \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(X))^2(\mathbb{E}(Y))^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Por (5) e (6) temos que

$$\mathrm{var}(XY) = \mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y) + (\mathbb{E}(X))^2\mathrm{var}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2\mathrm{var}(X).$$

29ªQUESTÃO: Sejam X e Y variáveis aleatórias com variâncias finitas. Mostre que se $\mathrm{var}(X) \neq \mathrm{var}(Y)$, então $X+Y$ e $X-Y$ não são independentes.

Resolução: Suponha por absurdo que $X+Y$ e $X-Y$ são independentes, assim $\mathbb{E}(X+Y)(X-Y) = \mathbb{E}(X+Y)\mathbb{E}(X-Y)$, mas $\mathbb{E}[(X+Y)(X-Y)] = \mathbb{E}(X^2-Y^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2)$ e $\mathbb{E}(X+Y)\mathbb{E}(X-Y) = (\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y))(\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y)) = (\mathbb{E}(X))^2 - (\mathbb{E}(Y))^2$, daí $\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) = (\mathbb{E}(X))^2 - (\mathbb{E}(Y))^2$, logo $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \mathrm{var}(Y)$, absurdo, pois $\mathrm{var}(X) \neq \mathrm{var}(Y)$.

30ªQUESTÃO: Seja X uma variável aleatória tendo distribuição $b(n,p)$. Mostre que X tem a mesma distribuição que $X_1 + \cdots + X_n$, onde as X_i são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas que assumem apenas os valores 0 e 1. (Qual é $\mathbb{P}(X_i = 1)$?)

Utilize esse resultado para calcular a esperança e a variância de X.

Resolução: Sabendo que $X_1 + \cdots + X_n$ são *i.i.d.* (independentes e identicamente distribuídas) com probabilidade digamos, $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ e $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$ para $0 \leq p \leq 1$, temos que $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = k)$ representa a probabilidade de X_i $(1 \leq i \leq n)$ assumir k valores 1 e $n - k$ valores 0. Como existem C_k^n combinações deste tipo, usamos a independência dos X_i e o fato de serem identicamente distribuídos e obtemos,

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = k) = C_k^n(\mathbb{P}(X_1 = 1))^k(\mathbb{P}(X_1 = 0))^{n-k} = C_k^n p^k(1-p)^{n-k}.$$

Portanto, $X_1 + \cdots + X_n \sim b(n, p)$.

Assim, calcular a esperança e a variância fica bem mais simples, já que, sabendo que $\mathbb{E}(X_i) = 0(1-p) + p = p$ para $1 \leq i \leq n$ e como $X \stackrel{d}{=} X_1 + \cdots + X_n$ temos que $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_1) = np.$

Para calcular a variância usamos o fato de que sendo os $X_{i's}$ independentes temos $\text{var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \text{var}(X_i)$ e como X_i assume apenas os valores 0 e 1 temos que $X_i^2 = X_i$ logo $\text{var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i)^2 - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X_i) - (\mathbb{E}(X))^2 = p - p^2$ e concluímos que $\text{var}(X) = n(p - p^2)$.

31ªQUESTÃO: Demonstre que a covariância é bilinear:

$$\text{cov}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j X_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \text{cov}(X_i, X_j)$$

onde os a_i eb_j são números reais. (Suponha que as X_i e Y_j possuam variâncias finitas.)

Resolução: Sabemos pela definição de covariância que

$$\text{cov}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j X_j\right) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j X_j\right)\right] - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i\right)\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j X_j\right).$$

Reescrevendo $\mathbb{E}\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_iX_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_jX_j\right)\right]$ e usando a linearidade da esperança temos,

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{m} a_iX_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_jX_j\right)\right] = \mathbb{E}\left[a_1X_1\left(\sum_{j=1}^{n} b_jX_j\right) + \cdots + a_mX_m\left(\sum_{j=1}^{n} b_jX_j\right)\right] \\
= \;& \mathbb{E}\left[a_1b_1X_1Y_1 + a_1b_2X_1Y_2 + \cdots + a_1b_nX_1Y_n + \cdots + a_mb_1X_mY_1 + \cdots + a_mb_nX_mY_n\right] \\
= \;& a_1b_1\mathbb{E}(X_1Y_1) + \cdots + a_1b_n\mathbb{E}(X_1Y_n) + \cdots + a_mb_1\mathbb{E}(X_mY_1) + \cdots + a_mb_n\mathbb{E}(X_mY_n) \\
= \;& \sum_{j=1}^{n} a_1b_j\mathbb{E}(X_1Y_j) + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_mb_j\mathbb{E}(X_mY_j) \\
= \;& \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\mathbb{E}(X_iY_j) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

de modo análogo temos que

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m} a_iX_i\right)\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} b_jX_j\right) = \mathbb{E}(a_1X_1 + \cdots a_mX_m)\mathbb{E}(b_1Y_1 + \cdots + b_nY_n) \\
= \;& \left[a_1\mathbb{E}(X_1) + \cdots + a_m\mathbb{E}(X_m)\right]\left[b_1\mathbb{E}(Y_1) + \cdots b_n\mathbb{E}(Y_n)\right] \\
= \;& a_1b_1\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_1) + \cdots + a_1b_n\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_n) + \cdots + a_mb_1\mathbb{E}(X_m)\mathbb{E}(Y_1) + \cdots + a_mb_n\mathbb{E}(X_m)\mathbb{E}(Y_n) \\
= \;& \sum_{j=1}^{n} a_1b_j\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_j) + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_mb_j\mathbb{E}(X_m)\mathbb{E}(Y_j) \\
= \;& \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(Y_j). \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Assim, de (7) e (8)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{m} a_iX_i, \sum_{j=1}^{n} b_jX_j\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{m} a_iX_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_jX_j\right)\right] - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m} a_iX_i\right)\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} b_jX_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\mathbb{E}(X_iY_j) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(Y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j(\mathbb{E}(X_iY_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(Y_j)) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\operatorname{cov}(X_i, Y_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_ib_j\operatorname{cov}(X_i, Y_j).
\end{aligned}
$$

37ªQUESTÃO: Exiba um exemplo de uma sequência tal que $X_n(\omega) \to X(\omega)\ \forall\omega \in \Omega$, com $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbb{E}(X_n)$ finitas, mas $\mathbb{E}(X_n) \nrightarrow \mathbb{E}(X)$. (Sugestão. Seja $Y \sim U[0,1]$ e defina

$X_n = n\mathbb{I}_{[0<Y<\frac{1}{n}]}$.)

Resolução: Considere $X_n = n\mathbb{I}_{[0<Y<\frac{1}{n}]} = n\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]}$. Note que, para todo $\omega \in [0,1]$, $X_n(\omega) = n\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]} = \begin{cases} n & \text{se } \omega \in [0,1/n] \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$, assim $X_n) \longrightarrow X \equiv 0$ para todo $\omega \in [0,1]$, já que quando $n \longrightarrow +\infty$ o intervalo $[0,1/n] \longrightarrow [0,0]$. Por outro lado, $\mathbb{E}(X_n) = n \cdot \mathbb{P}(X=n) = n\frac{1}{n} = 1$ enquanto que $\mathbb{E}(X) = 0$, desse modo $\mathbb{E}(X_n) \nrightarrow \mathbb{E}(X)$.

Capítulo 5

1ªQUESTÃO: Seja $A_1, A_2, \ldots$ uma sequência de eventos aleatórios em $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$, com indicadores $\mathbb{I}_{A_1}, \mathbb{I}_{A_2}, \ldots$. Mostre que $\mathbb{P}(A_n) \longrightarrow 0$ se, e somente se, $\mathbb{I}_{A_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Resolução: Dado que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$, queremos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(|\mathbb{I}_{A_n} - 0| \geq \varepsilon) = 0.$$

Como $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(|\mathbb{I}_{A_n} - 0| \geq \varepsilon) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(\mathbb{I}_{A_n} \geq \varepsilon)$, temos dois casos a considerar: caso $0 < \varepsilon \leq 1$, temos que "$\mathbb{I}_{A_n} \geq \varepsilon$" $= \{\omega \in \Omega; \mathbb{I}_{A_n}(\omega) \geq \varepsilon\} = A_n$, assim

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(|\mathbb{I}_{A_n} - 0| \geq \varepsilon) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(\mathbb{I}_{A_n} \geq \varepsilon) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.$$

Caso $\varepsilon > 1$, temos que "$\mathbb{I}_{A_n} \geq \varepsilon$" $= \{\omega \in \Omega; \mathbb{I}_{A_n}(\omega) \geq \varepsilon\} = \emptyset$, logo

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(|\mathbb{I}_{A_n} - 0| \geq \varepsilon) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(\mathbb{I}_{A_n} \geq \varepsilon) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Portanto, $\mathbb{I}_{A_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Considere agora que $\mathbb{I}_{A_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(|\mathbb{I}_{A_n} - 0| \geq \varepsilon) = 0$. Mas como $0 = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(|\mathbb{I}_{A_n} - 0| \geq \varepsilon) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(\mathbb{I}_{A_n} \geq \varepsilon)$, para todo $\varepsilon > 0$, tome então $0 < \varepsilon \leq 1$ assim, "$\mathbb{I}_{A_n} \geq \varepsilon$" $= \{\omega \in \Omega; \mathbb{I}_{A_n}(\omega) \geq \varepsilon\} = A_n$. Logo

$$0 = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(|\mathbb{I}_{A_n} - 0| \geq \varepsilon) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(\mathbb{I}_{A_n} \geq \varepsilon) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

3ªQUESTÃO: Seja $(X_n)_{n\geq1}$ uma sequência de variáveis aleatórias. Prove que se $\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow \alpha$ e $\text{var}(X_n) \longrightarrow 0$, então $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha$.

Resolução: Como $0 = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \text{var}(X_n) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)^2 - (\mathbb{E}(X_n))^2$ então $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)^2 = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (\mathbb{E}(X_n))^2 = \alpha^2$, já que, $\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow \alpha$.

Seja $\varepsilon > 0$, temos pela desigualdade de Chebychev que,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n - \alpha| \geq \varepsilon) &\leq \frac{\mathbb{E}(X_n - \alpha)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{E}(X_n^2 - 2\alpha X_n + \alpha^2)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{\mathbb{E}(X_n^2) - 2\alpha\mathbb{E}(X_n) + \alpha^2)}{\varepsilon^2} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha^2 - 2\alpha \cdot \alpha + \alpha^2}{\varepsilon^2} = 0. \end{aligned}$$

Logo, para todo $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - \alpha| \geq \varepsilon) = 0$, ou seja, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha$.

6ªQUESTÃO: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que X_n tem distribuição $U[0, a_n]$, onde $a_n > 0$. Mostre:

(a) Se $a_n = n^2$, então com probabilidade 1, somente um número finito das X_n toma valores menores que 1.

(b) Se $a_n = n$, então com probabilidade 1, um número infinito das X_n toma valores menores que 1.

Resolução:

Item(a): Como $X_n \sim U[0, n^2]$ temos que $\mathbb{P}(X_n < 1) = \frac{1}{n^2}$. Considere agora o evento $A_n = [X_n < 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Daí temos que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, pelo Lema de Borel-Cantelli $\mathbb{P}(A_n$ infinitas vezes$) = 0$, ou seja, $\mathbb{P}(A_n$ finitas vezes$) = 1$.

Item(b): Como $X_n \sim U[0, n]$ temos que $\mathbb{P}(X_n < 1) = \frac{1}{n}$. Assim considerando o evento $A_n = [X_n < 1]$, $n \in \mathbb{N}$, temos que os $A_{n's}$ são independentes, já que os $X_{i's}$ são independentes e $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, novamente pelo Lema de Borel-Cantelli temos que $\mathbb{P}(A_n$ infinitas vezes$) = 1$.

7ªQUESTÃO: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$. Mostre que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mas $\mathbb{P}(X_n \to 0) = 0$.

Resolução: Queremos provar que para qualquer $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = 0$. Sabemos que $\mathbb{P}(X_n \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n}$ e como para dado $\varepsilon > 0$ temos que

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n \neq 0) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0,$$

ou seja, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Resta agora mostrar que $\mathbb{P}(X_n \longrightarrow 0) = 0$, para tanto é suficiente mostrar que $\mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon$ infinitas vezes$) = 1$ para algum $\varepsilon > 0$, pois neste caso teremos $X_n \geq \varepsilon$ infinitas vezes com probabilidade 1 e este evento implica que $X_n \not\longrightarrow 0$. Assim, considere o evento $A_n = [X_n \geq \frac{1}{2}]$ e note os $A_{n's}$ são independentes, pois os $X_{i's}$ são independentes e mais $\mathbb{P}(A_n) \geq \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, logo $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \geq \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ e pelo Lema de Borel-Cantelli temos $\mathbb{P}(A_n$ infinitas vezes$) = 1$ o que completa o exercício.

9ªQUESTÃO: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição exponencial de parâmetro 1. Mostre que

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} > 1 \text{ infinitas vezes}\right) = 1$$

mas

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} > 2 \text{ infinitas vezes}\right) = 0.$$

Resolução: Como $\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} > 1 \text{ infinitas vezes}\right) = \mathbb{P}\left(\limsup\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left[\frac{X_n}{\log n} > 1\right]\right)$. Definamos $A_1 = \left[\frac{X_2}{\log 2} > 1\right], A_2 = \left[\frac{X_3}{\log 3} > 1\right], \ldots$. Como os X_n são independentes temos que os A_n também são independentes e sabendo que a distribuição é exponencial de parâmetro 1 temos

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left[\frac{X_n}{\log n} > 1\right] = \mathbb{P}\left[X_n > \log n\right] = \int\limits_{\log n}^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}|_{\log n}^{+\infty} = \frac{1}{n},$$

assim, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Pelo Lema de Borel-Cantelli temos que $\mathbb{P}(\limsup\limits_{n \longrightarrow +\infty} A_n) = 1$.

Por outro lado, sabendo que $\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} > 2 \text{ infinitas vezes}\right) = \mathbb{P}\left(\limsup\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left[\frac{X_n}{\log n} > 2\right]\right)$. Definamos como acima $A_1 = \left[\frac{X_2}{\log 2} > 2\right], A_2 = \left[\frac{X_3}{\log 3} > 2\right], \ldots$. Como a distribuição é exponencial de parâmetro 1 temos

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left[\frac{X_n}{\log n} > 2\right] = \mathbb{P}\left[X_n > 2\log n\right] = \int\limits_{\log n^2}^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}|_{\log n^2}^{+\infty} = \frac{1}{n^2} < \infty$$

e novamente pelo Lema de Borel-Cantelli temos que $\mathbb{P}(\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} A_n) = 0$.

11ªQUESTÃO: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias.
(a) Demonstre: se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > n) < \infty$, então $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{|X_n|}{n} \leq 1$ quase certamente.
(b) Se as X_n são identicamente distribuídas e integráveis, demonstre que

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \frac{|X_n|}{n} \leq 1 \text{ quase certamente.}$$

Resolução:
Item (a): Considere o evento $A_n = [\frac{|X_n|}{n} > 1]$, onde $n \in \mathbb{N}$. Como $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ temos pelo Lema de Borel-Cantelli que $\mathbb{P}(A_n$ infinitas vezes$) = 0$. Assim $\mathbb{P}(A_n$ finitas vezes$) = 1$, ou ainda, $\frac{|X_n|}{n} \leq 1$ ocorre para infinitos valores de n com probabilidade 1. Logo $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{|X_n|}{n} \leq 1$ quase certamente.
Item (b): Defina $A_n = [\frac{|X_n|}{n} \leq 1]$ para $i \in \mathbb{N}$, queremos provar que $\mathbb{P}(A_n$ infinitas vezes$) = 1$. Como $\mathbb{P}[\frac{|X_n|}{n} \leq 1] = 1 - \mathbb{P}[\frac{|X_n|}{n} > 1] = 1 - \mathbb{P}[|X_n| > n]$ usando a desigualdade de Chebychev temos que $\mathbb{P}[\frac{|X_n|}{n} \leq 1] = 1 - \mathbb{P}[|X_n| > n] \geq 1 - \frac{\mathbb{E}(|X_n|)}{n}$.

Como os $X_{i's}$ são identicamente distribuídos e integráveis temos $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_1) < +\infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$, logo

$$\mathbb{P}\left[\frac{|X_n|}{n} \leq 1\right] \geq 1 - \frac{\mathbb{E}(|X_n|)}{n} = 1 - \frac{\mathbb{E}(|X_1|)}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 1.$$

Como $\mathbb{P}[\frac{|X_n|}{n} \leq 1] \leq 1$ temos que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}[\frac{|X_n|}{n} \leq 1] = 1$. Assim, $\mathbb{P}(A_n$ infinitas vezes$) = 1$, ou seja, $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{|X_n|}{n} \leq 1$ quase certamente.

12ªQUESTÃO: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $X_1 \sim U[0,1]$. Prove que $n^{-X_n} \longrightarrow 0$ em probabilidade, mas n^{-X_n} não converge quase certamente para 0. (Sugestão para a parte quase certa: prove que $\mathbb{P}(n^{-X_n} \to 0) = 0$.)

Resolução: Seja $\varepsilon > 0$ e considere $n^{-X_n} \geq \varepsilon = \{\omega \in \Omega;\ n^{-X_n(\omega)} \geq \varepsilon\}$. Como para $n > 1$ temos que $n^{-X_n(\omega)} \geq \varepsilon$ é equivalente a $X_n(\omega) \leq -\frac{\log \varepsilon}{\log n}$. Assim para $n > 1$, $n^{-X_n} \geq \varepsilon = \{\omega \in \Omega;\ X_n(\omega) \leq -\frac{\log \varepsilon}{\log n}\} = X_n \leq -\frac{\log \varepsilon}{\log n}$.

Como a distribuição é uniforme em $[0,1]$ temos que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(|n^{-X_n} - 0| \geq \varepsilon) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(n^{-X_n} \geq \varepsilon) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \leq -\frac{\log \varepsilon}{\log n}) = -\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\log \varepsilon}{\log n} = 0$, ou seja, $n^{-X_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Vamos agora mostrar que $\mathbb{P}(n^{-X_n} \to 0) = 0$, ou equivalentemente, que $\mathbb{P}(n^{-X_n} \not\to 0) = 1$. Para isso considere $0 < \varepsilon < 1$ e o evento $A_n = [n^{-X_n} \geq \varepsilon] = [X_n \leq -\frac{\log \varepsilon}{\log n}]$ onde $n > 1$, daí temos que $\log \varepsilon^{-1} > 0$ e como $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \geq \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{\log \varepsilon^{-1}} = +\infty$, além disso os $A_{i's}$ são independentes e pelo Lema de Borel-Cantelli temos que $\mathbb{P}(A_n$ infinitas vezes$) = 1$, ou seja, $\mathbb{P}(n^{-X_n} \to 0) = 0$.

Questões de Sala

OBSERVAÇÃO: Algumas das questões elaborada durante as aulas já foram respondidas em alguns dos exercícios anteriores, logo não serão incluidos aqui.

DIA 28/08/13: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ independentes. Mostre que

$$\mathbb{P}\left(\omega \in \Omega;\ \exists \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n}\right) = 0 \text{ ou } 1$$

Resolução: Observe que sendo $X_1, X_2, \ldots$ independentes, basta pela Lei 0-1 de Kolmogorov, mostrar que $\{\omega \in \Omega;\ \exists \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n}\}$ pertence a $\sigma-$álgebra caudal $\mathcal{T} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$.

Para isso, note que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n} &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{X_1(\omega)}{n} + \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n} \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n}.
\end{aligned}$$

já que, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{X_1(\omega)}{n} = 0$. Assim,

$$\left\{\omega \in \Omega;\ \exists \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n}\right\} = \left\{\omega \in \Omega;\ \exists \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n}\right\}.$$

De modo análogo temos que,

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n} &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{X_3(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n}\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{X_4(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n}\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{X_5(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n}\\ &\vdots\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{X_{n_0}(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\{\omega\in\Omega;\ \exists\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n}\right\} = \left\{\omega\in\Omega;\ \exists\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{X_{n_0}(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n}\right\}$$

Portanto, $\left\{\omega\in\Omega;\ \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n}\right\}\in\mathcal{J}$ e pela Lei 0-1 de Kolmogorov,

$$\mathbb{P}\left(\omega\in\Omega;\ \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n}\right)=0 \text{ ou } 1.$$

DIA 02/09/13: Se $X\sim\mathrm{geom}(p)$, então

$$\mathbb{P}(X\geq k+h|X\geq h)=\mathbb{P}(X>k).$$

Resolução: Como $X\sim\mathrm{geom}(p)$, então

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\geq k+h|X\geq h) &= \frac{\mathbb{P}(X\geq k+h\cap X\geq h)}{\mathbb{P}(X\geq h)}=\frac{\mathbb{P}(X\geq k+h)}{\mathbb{P}(X\geq h)}\\ &= \frac{\sum\limits_{i=k+h-1}^{+\infty}p(1-p)^i}{\sum\limits_{j=h-1}^{+\infty}p(1-p)^j}=\frac{\frac{(1-p)^{k+h-1}}{p}}{\frac{(1-p)^{h-1}}{p}}=(1-p)^k.\end{aligned}$$

Por outro lado, $\mathbb{P}(X>k)=p\sum\limits_{i=k}^{+\infty}(1-p)^i=p\frac{(1-p)^k}{1-(1-p)}=(1-p)^k$. Daí concluímos que $\mathbb{P}(X\geq k+h|X\geq h)=\mathbb{P}(X>k)$.