



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



**Limite Hidrodinâmico de Processos de Exclusão
Totalmente Assimétricos**

Luana Amaral Gurgel

Salvador-BA
Fevereiro/2016

Limite Hidrodinâmico de Processos de Exclusão Totalmente Assimétricos

Luana Amaral Gurgel

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Colegiado da Pós-Graduação em
Matemática da Universidade Federal
da Bahia como requisito parcial para
obtenção do Título de Mestre em Mate-
mática.

Orientador: **Prof. Dr. Tertuliano
Franco**

Salvador-BA
Fevereiro/2016

Aos meus pais
e meu noivo.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, pelas oportunidades e graças que tem me dado.

Agradeço à minha mãe, Sonia, pelo carinho e apoio em todos momentos da minha vida, por compreender minha ausência e minhas decisões. Palavras nunca serão suficientes para agradecer tudo o que fez e faz por mim, te amo demais. Agradeço a meu pai, Walan, sempre presente em meu coração, sua alegria de vida me ensinou muito e sei que ninguém sentiria tanto orgulho de mim nesse momento quanto você. Também agradeço a toda minha família, em especial aos meus queridos avós, D. Lica, Sr. Zico e D. Santa.

Ao meu maior companheiro de vida e meu grande amor, Tulio, não só posso agradecer como também dedicar esse trabalho. Muito obrigada meu amor, por ter me ensinado e me ajudado tanto. Por ser meu ombro nos momentos de saudade, meu professor particular, meu maior incentivador e minha melhor companhia. Obrigada por acreditar tanto em mim e tornar meus dias mais leves e felizes. Nunca vou conseguir expressar com palavras a sua importância na minha vida. Também tenho que te agradecer por me emprestar sua família, que agora é a minha segunda família, e nos dá tanto apoio e carinho.

Aos meus sogros, Maura e Edinho, agradeço pelo apoio, confiança e por serem tão presentes em nossas vidas. Vocês são como pais para mim.

Agradeço a todos os meus amigos. Aos de BH, obrigada por conseguirem manter nossa amizade à distância, foram poucos nossos encontros, mas intensos e maravilhosos como sempre. Aos novos amigos de Salvador, meu muito obrigada pela acolhida, com vocês me senti em casa e vivi momentos inesquecíveis, vou levar vocês comigo para sempre.

Em especial, agradeço à Fátima, Haroldo, Luiza e Clara, minha família baiana, nunca vou esquecer o que fizeram por nós.

Meu grande agradecimento ao meu orientador, professor Tertuliano Franco. Muito obrigada por aceitar trabalhar comigo, me passar tanto conhecimento, ser tão atencioso, amigo e paciente. Você exerce sua profissão com tanto brilho nos olhos que é fonte de inspiração para mim. Agradeço aos professores Vitor, Maria José e Patrícia que aceitaram fazer parte da minha banca e ler esta dissertação. Agradeço também a todos os professores da pós-graduação, pela dedicação ao trabalho.

Por fim agradeço a UFBA pela oportunidade e à CAPES pelo apoio financeiro.

“Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante de meus olhos.”

Isaac Newton.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos em detalhe a prova do limite hidrodinâmico para o processo de k -exclusão totalmente assimétrico a partir do limite hidrodinâmico para um processo de alturas associado. Como principais ferramentas, utilizamos o Teorema Ergódico Sub-aditivo de Kingman e atratividade.

Palavras-chave: Limite hidrodinâmico, processo de exclusão totalmente assimétrico e Teorema Ergódico Sub-aditivo de Kingman.

Abstract

In this dissertation, we study in detail the proof of the hydrodynamic limit for totally asymmetric k -exclusion processes from the hydrodynamic limit of the associated height process. As main tools, we utilize the Kingman's Sub-additive Ergodic Theorem and attractiveness.

Keywords: Hydrodynamic limit, totally asymmetric exclusion processes and Kingman's Sub-additive Ergodic Theorem.

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	x
2 Processos de Poisson e Construção Gráfica de sistemas de partículas	2
2.1 Preliminares	2
2.2 Processos de Poisson	5
2.3 Construção Gráfica do processo de k -exclusão totalmente assimétrico	17
3 Processo de alturas	20
3.1 Construção	20
3.2 Propriedades do processo de alturas	23
3.3 Lei dos grandes números para a função altura	26
3.4 Limite hidrodinâmico para o processo de alturas	42
3.5 O limite hidrodinâmico como solução de uma equação diferencial parcial	52
4 Prova do limite hidrodinâmico para o k-TASEP	63
5 Perspectivas futuras	67
Bibliografia	67
Índice Remissivo	68

Lista de Figuras

2.1	Ilustração de um sorteio do processo de Poisson.	6
2.2	Ilustração de um sorteio do processo de Poisson.	6
2.3	Representação gráfica do conjunto $[T_n \leq t < T_n + \tau_{n+1}]$. . .	8
2.4	Salto no tempo t	17
2.5	Configuração inicial do processo.	18
2.6	Construção do Processo de 1-Exclusão.	19
2.7	Dinâmica do processo de k -exclusão totalmente assimétrico. . .	19
3.1	Salto da partícula no sítio 0.	21
3.2	Funções altura.	21
3.3	Representação gráfica de Y	27
3.4	Representação gráfica do conjunto A_n	29
3.5	Relação do perfil minimal com a configuração de partículas. . .	30
3.6	Tempos de saltos.	31
3.7	Representação gráfica da função g	32
3.8	Perfil minimal transladado.	34
3.9	Evolução no tempo de ξ e σ^m	35
3.10	Função altura determinada pelo perfil minimal transladado.	43

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação, provamos o limite hidrodinâmico para o processo de exclusão totalmente assimétrico, tendo como referência base o livro [7] e também o artigo [8]. O processo de exclusão totalmente assimétrico (TASEP) pode ser construído em \mathbb{Z}^d , porém trataremos aqui apenas do caso unidimensional, o que simplifica consideravelmente os cálculos, e além disso nos permite a utilização de figuras para auxiliar a leitura. Para dimensões maiores seria necessário estudar percolação de última passagem, enquanto que no caso unidimensional técnicas de grandes desvios serão suficientes.

O processo de exclusão é um sistema de partículas interagentes de grande importância em Probabilidade e em Mecânica Estatística. Seu uso nessas áreas é motivado pelo fato de exibir interação entre partículas e por outro lado, ser matematicamente tratável (em geral, provas matematicamente rigorosas em Mecânica Estatística são de grande dificuldade técnica).

A dinâmica do TASEP pode ser resumida intuitivamente da seguinte maneira: o espaço de estados do sistema é dado por configurações de partículas em \mathbb{Z} . Cada número inteiro representa o que chamaremos de sítio, e em cada sítio, permitimos de zero a k partículas (daí o nome k -exclusão). Dada uma configuração inicial de partículas, vamos definir uma evolução (aleatória) no tempo desta configuração.

Nesta evolução, cada partícula se moverá somente para um mesmo sentido (aqui convecionamos para a direita), daí o nome “totalmente assimétrico”. A evolução temporal se dará da seguinte forma. A cada sítio de \mathbb{Z} , associamos um relógio Poisson (a ser definido no Capítulo 2). Quando um relógio toca, uma das partículas neste sítio salta para o sítio vizinho à sua direita, desde que haja uma partícula no sítio de origem e com a regra de que no máximo k partículas por sítio seja respeitada no sítio de chegada. Através da chamada Construção Gráfica, feita no Capítulo 2, a dinâmica do processo será definida rigorosamente.

Fazendo uma relação direta com o processo de k -exclusão vamos construir o processo de alturas. Esse processo é obtido através de funções alturas, que são funções crescentes $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. A relação com o TASEP é feita da seguinte maneira: dado uma certa configuração do processo de k -exclusão, a quantidade de partículas somadas do sítio 0 até um sítio x definirá o valor da função altura em x . Assim, uma configuração para o TASEP definirá as inclinações de uma função altura. Em palavras, obteremos configurações de um processo de k -exclusão através da derivada discreta de funções alturas.

O principal teorema aqui estudado é o chamado limite hidrodinâmico (para o TASEP), que consiste no limite da trajetória temporal da densidade espacial de partículas, quando certos parâmetros são escalonados, no nosso caso, tempo e espaço. Iremos provar o limite hidrodinâmico para um processo de alturas associado, o qual implicará o limite hidrodinâmico para o processo de k -exclusão totalmente assimétrico.

Provaremos primeiramente o limite hidrodinâmico para o processo de altura, tendo como perfil inicial do processo o perfil minimal, definiremos este perfil ao longo do texto. Para isso, utilizaremos como ferramenta fundamental o Teorema Ergódico Sub-aditivo de Kingman e a noção de atratividade (a ser definida no texto). A partir daí, conseguiremos mostrar o limite hidrodinâmico para o processo de alturas com qualquer perfil inicial. Pela estreita relação entre o processo de exclusão e o processo de altura provaremos o limite hidrodinâmico para o k -TASEP.

Começaremos o Capítulo 2 com algumas definições básicas de probabilidade, que utilizaremos ao longo da dissertação. Depois disso, ainda no mesmo capítulo, definiremos e apresentaremos algumas propriedades do processo de Poisson, que serão necessárias para construir o processo de exclusão logo em seguida. No Capítulo 3, será definido o processo de altura, e sua relação com o processo de exclusão. Além disso, provaremos nesta parte a e a noção de atratividade do processo de alturas, que é uma das peças chave para na prova de seu limite hidrodinâmico. No Capítulo 4, provaremos o limite hidrodinâmico para processos de k -exclusão totalmente assimétricos. Por fim, no Capítulo 5, apresentamos perspectivas futuras.

Capítulo 2

Processos de Poisson e Construção Gráfica de sistemas de partículas

Neste capítulo daremos algumas definições básicas da teoria da probabilidade e enunciaremos o lema de Borel-Cantelli que será utilizado diversas vezes ao longo da dissertação. Além disso apresentaremos o processo de Poisson que será necessário para, posteriormente, construirmos processos de exclusão. Também vamos construir graficamente sistemas de partículas.

2.1 Preliminares

Inicialmente definiremos espaço de probabilidade, variáveis aleatórias e processo estocástico.

Definição 2.1. *Um espaço de probabilidade é um trio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde Ω é um conjunto não-vazio, \mathcal{F} é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω e \mathbb{P} é uma medida de probabilidade em \mathcal{F} .*

Em geral, não especificamos exatamente o espaço de probabilidade no qual estamos trabalhando. Enunciamos apenas as hipóteses (inde-

pendência, distribuições, etc.) para as quais os resultados são válidos (independentemente do espaço de probabilidade escolhido).

Observação 2.1. *Dada uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, utilizaremos a seguinte notação ao longo do texto:*

$$[X \leq x] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\}.$$

Definição 2.2. *Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $[X \leq x] \in \mathcal{F}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.3. *Cosidere X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias definidas no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e F_1, \dots, F_n eventos pertencentes à \mathcal{F} . Os eventos F_1 e F_2 são independentes se*

$$\mathbb{P}[F_1 \cap F_2] = \mathbb{P}[F_1] \cdot \mathbb{P}[F_2].$$

As variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n são coletivamente independentes se

$$\mathbb{P}[X_1 \in F_1, \dots, X_n \in F_n] = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}[X_i \in F_i].$$

Definição 2.4. *Dado uma variável aleatória X , definimos sua função de distribuição de probabilidade por*

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x].$$

Definição 2.5. *Uma variável aleatória X possui função de densidade $f(x)$ se*

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(y) dy.$$

Nessa dissertação utilizaremos variáveis aleatórias com distribuição exponencial, Poisson e Gamma. A seguir apresentamos as suas respectivas definições.

Definição 2.6. a) Uma variável aleatória tem distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ se sua função densidade $f(x)$ for do tipo

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

b) Uma variável aleatória X tem distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda > 0$ se sua função de probabilidade for dada por

$$\mathbb{P}[X = m] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!},$$

com $m = 0, 1, 2, \dots$.

c) Uma variável aleatória X tem distribuição Gamma de parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ se sua função densidade $f(x)$ for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases},$$

onde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$.

Definição 2.7. Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias $\{X_j; j \in J\}$ definidas em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e indexados por elementos do conjunto J .

Agora enunciaremos o lema de Borel-Cantelli, que será utilizado diversas vezes ao longo da dissertação. Uma prova desse lema pode ser vista em [2]. Antes, vamos definir o evento “ A_n infinitas vezes”.

Definição 2.8. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $A_n \in \mathcal{F}$. Então o evento [A_n infinitas vezes] pode ser definido como

$$\begin{aligned} [A_n \text{ infinitas vezes}] &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \\ &= \{\omega \in \Omega; \omega \in A_n \text{ para infinitos } A'_n\text{'s}\} = \limsup_n A_n. \end{aligned}$$

Proposição 2.1. Lema de Borel-Cantelli. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e considere $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$.*

(a) *Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, então*

$$\mathbb{P}(A_n \text{ infinitas vezes}) = 0.$$

(b) *Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ e os A_n são independentes, então*

$$\mathbb{P}(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1.$$

2.2 Processos de Poisson

O processo de Poisson foi apresentado por Siméon Denis Poisson em 1834. Tal processo estocástico serve como representação de diversos modelos referentes a chegadas no tempo como, por exemplo, chamadas telefônicas em uma empresa ou chegadas de ônibus em um ponto. A seguir definiremos precisamente o processo de Poisson.

Sejam $\{\tau_i\}_{i \geq 1}$ variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$. Interpretamos cada τ_i como o tempo decorrido entre duas chegadas. Assim, o tempo da primeira chegada será definido como $T_1 = \tau_1$, o tempo da segunda chegada será $T_2 = \tau_1 + \tau_2$ e assim por diante, ou seja,

$$T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i.$$

Convencionamos $T_0 = \tau_0 = 0$.

Definição 2.9. *O processo de Poisson com parâmetro λ é o processo estocástico $\{N_t\}_{t \geq 0}$, onde a variável aleatória N_t representa o número de chegadas no intervalo $[0, t]$, ou seja, N_t é definido por*

$$N_t = \inf \{n \geq 0; T_{n+1} > t\}.$$

A contagem do tempo ditada pelo processo de Poisson vai ser chamada de relógio de Poisson. Graficamente, um sorteio típico do Processo de Poisson pode ser visto como na Figura 2.1.

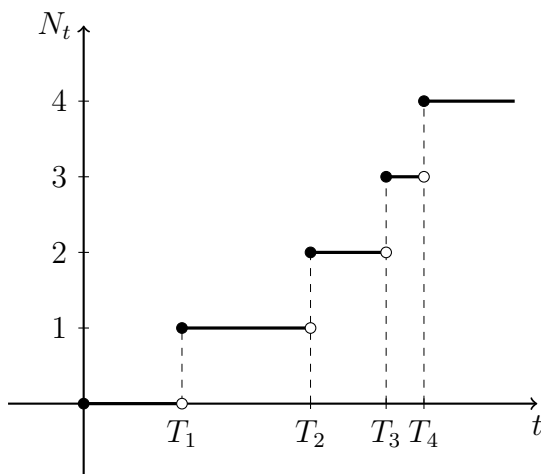


Figura 2.1: Ilustração de um sorteio do processo de Poisson.

Usaremos a notação $\text{PPP}(\lambda)$ para denotar um processo de Poisson de parâmetro λ . Esta abreviatura vem de “processo pontual de Poisson”, nome também utilizado na literatura. Também ilustraremos o processo de Poisson por uma linha vertical com marcas nos tempos de chegada, como na Figura 2.2.

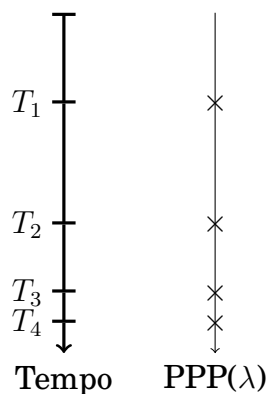


Figura 2.2: Ilustração de um sorteio do processo de Poisson.

Proposição 2.2. *Considere as variáveis aleatórias $\{\tau_i\}_{i \geq 1}$ e $\{N_t\}_{t \geq 0}$ descritas na Definição 2.9. Então, para cada $t > 0$, a variável aleatória N_t tem distribuição de Poisson de parâmetro λt . Ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$\mathbb{P}[N_t = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Dizemos que, para t fixo, N_t denota o número de chegadas de Poisson no tempo t e T_n é o tempo da n -ésima chegada de Poisson.

Demonstração. Fixado $n \in \mathbb{N}$ e $t > 0$, temos que

$$\mathbb{P}[N_t = n] = \mathbb{P}[T_n \leq t < T_{n+1}] = \mathbb{P}[T_n \leq t < T_n + \tau_{n+1}]. \quad (2.1)$$

Portanto, nosso objetivo é calcular $\mathbb{P}[T_n \leq t < T_n + \tau_{n+1}]$. Como τ_n tem distribuição exponencial com parâmetro λ então $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$ tem distribuição Gamma com parâmetros n e λ , este fato é conhecido e pode ser provado via convolução das densidades. Como T_n e τ_{n+1} são independentes, a função densidade do vetor aleatório (T_n, τ_{n+1}) será dada pelo produto das densidades:

$$f_{(T_n, \tau_{n+1})}(x, y) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \lambda e^{-\lambda y} = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

A parte em azul da Figura 2.3 nos informa os limites de integração da função densidade. Portanto, voltando em (2.1), temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_n \leq t < T_n + \tau_{n+1}] &= \int_0^t \int_{t-x}^{+\infty} f_{(T_n, \tau_{n+1})}(x, y) dy dx \\ &= \int_0^t \int_{t-x}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dy dx \\ &= \int_0^t \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \left(-e^{-\lambda(x+y)} \Big|_{y=t-x}^{+\infty} \right) dx \\ &= \int_0^t \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} dx \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \left(\frac{x^n}{n} \Big|_0^t \right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

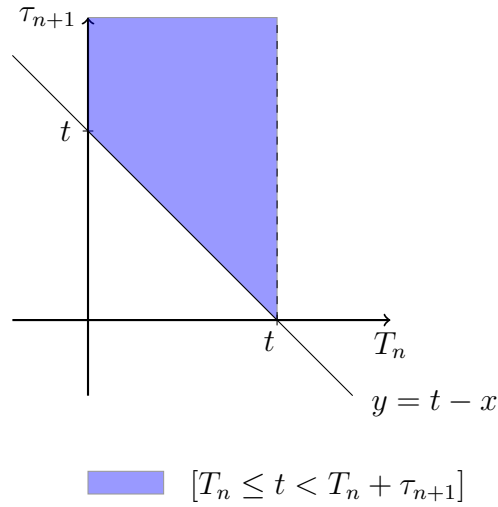


Figura 2.3: Representação gráfica do conjunto $[T_n \leq t < T_n + \tau_{n+1}]$.

Logo,

$$\mathbb{P}[N_t = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

ou seja, N_t tem distribuição de Poisson de parâmetro λt . □

Proposição 2.3. *Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson de parâmetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivamente. Então $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ tem distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson de parâmetros λ_1 e λ_2 respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 + X_2 = m] &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{a=0}^m [X_1 = a] \cap [X_2 = m - a]\right] \\ &= \sum_{a=0}^m \mathbb{P}[[X_1 = a] \cap [X_2 = m - a]]. \end{aligned}$$

Como X_1 e X_2 são independentes,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1 + X_2 = m] &= \sum_{a=0}^m \mathbb{P}[X_1 = a] \mathbb{P}[X_2 = m - a] = \sum_{a=0}^m \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^a}{a!} \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^{m-a}}{(m-a)!} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{a=0}^m \frac{\lambda_1^a}{a!} \frac{\lambda_2^{m-a}}{(m-a)!} \frac{m!}{m!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{m!} \sum_{a=0}^m \binom{m}{a} \lambda_1^a \lambda_2^{m-a} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{m!} (\lambda_1 + \lambda_2)^m.\end{aligned}$$

Portanto, $X_1 + X_2$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda_1 + \lambda_2$. Suponha que esta propriedade vale para um inteiro $n - 1$, ou seja, que $X_1 + \dots + X_{n-1}$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}$. Considere $Y = X_1 + \dots + X_{n-1}$. Então, usando novamente a independência entre Y e X_n

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y + X_n = m] &= \sum_{a=0}^m \mathbb{P}[Y = a] \mathbb{P}[X_n = m - a] \\ &= \sum_{a=0}^m \frac{e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})} (\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})^a}{a!} \frac{e^{-\lambda_n} \lambda_n^{m-a}}{(m-a)!} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \sum_{a=0}^m \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})^a \lambda_n^{m-a}}{a! (m-a)!} \frac{m!}{m!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}}{m!} \sum_{a=0}^m \binom{m}{a} (\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})^a \lambda_n^{m-a} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}}{m!} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^m.\end{aligned}$$

Portanto, $X_1 + \dots + X_n$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Para a proposição que segue, utilizaremos técnicas de grandes desvios, que estimam a probabilidade de observar eventos que diferem do limite esperado pela lei dos grandes números. Tais estimativas são, em geral, exponenciais. Aqui vamos calcular essa taxa de decaimento considerando variáveis aleatórias com distribuição de Poisson e exponen-

cial, que serão utilizadas nas demonstrações dos principais teoremas desta dissertação.

Proposição 2.4. *Seja $S_n = X_1 + \dots + X_n$ onde X_i , com $i = 1, \dots, n$, são variáveis aleatórias independentes e com mesma distribuição. Considere os dois seguintes casos.*

i) Suponha que X_i tenha distribuição de Poisson de parâmetro λ , para todo $i \in \mathbb{N}$. Então, para $x > 0$,

$$\mathbb{P}[S_n \geq nx] \leq e^{-nI(x)} \quad e \quad \mathbb{P}[S_n \leq nx] \leq e^{-nI(x)},$$

onde $I(x) = x \log\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \lambda - x$ é a chamada função taxa de Cramér para grandes desvios de variáveis aleatórias com distribuição de Poisson.

ii) Suponha que X_i tenha distribuição exponencial de parâmetro 1 para todo $i \in \mathbb{N}$. Então, para $u, v \in \mathbb{R}$ tais que $v > 1$ e $u < 1$,

$$\mathbb{P}[S_n \geq nv] \leq e^{-nI(v)} \quad e \quad \mathbb{P}[S_n \leq nu] \leq e^{-nI(u)},$$

onde $I(x) = x - 1 - \log(x)$ é a função taxa de Cramér para grandes desvios de variáveis aleatórias exponenciais de parâmetro 1.

Demonstração. *i) Dado $x \in \mathbb{R}$ e $\theta > 0$, mostraremos que $\mathbb{P}[S_n \geq nx] \leq e^{-nI(x)}$. Temos que*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n \geq nx] &= \mathbb{P}\left[\frac{\theta S_n}{n} \geq \theta x\right] = \mathbb{P}\left[\exp\left\{\frac{\theta S_n}{n}\right\} \geq \exp\{\theta x\}\right] \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{\theta S_n}{n}\right\}\right]}{\exp\{\theta x\}} = \frac{\mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{\theta X_1}{n}\right\}\right]^n}{\exp\{\theta x\}}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $\mathbb{E}[X]$ é a esperança da variável aleatória X (Ver [1]). Para a desigualdade acima utilizamos a desigualdade de Markov e a igualdade

seguinte vem do fato de X_i serem independentes. Note que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{\theta X_1}{n}\right\}\right] &:= \sum_{y=0}^{\infty} e^{(\theta y/n)} \mathbb{P}[X_1 = y] = \sum_{y=0}^{\infty} e^{(\theta y/n)} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(e^{(\theta/n)} \lambda)^y}{y!} = e^{-\lambda} \exp\{e^{(\theta/n)} \lambda\} \\ &= \exp\{\lambda(e^{(\theta/n)} - 1)\}. \end{aligned}$$

Voltando em (2.2),

$$\mathbb{P}[S_n \geq nx] \leq \exp\{n\lambda(e^{(\theta/n)} - 1) - \theta x\}, \quad \forall \theta > 0.$$

Em particular, minimizando em θ , obtemos

$$\mathbb{P}[S_n \geq nx] \leq \inf_{\theta \in \mathbb{R}^+} \exp\{n\lambda(e^{(\theta/n)} - 1) - \theta x\} = \inf_{\theta \in \mathbb{R}^+} g(\theta), \quad (2.3)$$

onde $g(\theta) = \exp\{n\lambda(e^{(\theta/n)} - 1) - \theta x\}$. Vamos calcular o ínfimo acima. Temos que $g''(\theta) > 0$ já que $\theta > 0$. Então g assume mínimo em $\theta_0 \in \mathbb{R}^+$ se $g'(\theta_0) = 0$, como

$$g'(\theta_0) = \exp\{n\lambda(e^{(\theta_0/n)} - 1) - \theta_0 x\} (\lambda e^{(\theta_0/n)} - x),$$

então,

$$g'(\theta_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda e^{(\theta_0/n)} = x \Leftrightarrow \theta_0 = n \log\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Assim, substituindo $g(n \log(x/\lambda))$ em (2.3), concluimos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n \geq nx] &\leq \exp\left\{n\lambda \exp\left\{\frac{n \log(x/\lambda)}{n}\right\} - n\lambda - nx \log\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{n\left(x - \lambda - x \log\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)\right\} = e^{-nI(x)}. \end{aligned}$$

Para mostrar que $\mathbb{P}[S_n \leq nx] \leq e^{-nI(x)}$, vamos proceder de maneira

análoga à usada na primeira parte do teorema. Dado $x \in \mathbb{R}$ e $\theta > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n \leq nx] &= \mathbb{P}[-\theta S_n \geq -\theta nx] = \mathbb{P}\left[\exp\left\{-\frac{\theta}{n}S_n\right\} \geq \exp\{-\theta x\}\right] \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\theta}{n}S_n\right\}\right]}{\exp\{-\theta x\}} = \frac{\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\theta}{n}X_1\right\}\right]^n}{\exp\{-\theta x\}} \\ &= \exp\{n\lambda(e^{-\theta/n} - 1) + \theta x\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Note que usamos a desigualdade de Markov e a esperança calculada na primeira parte do teorema. Como θ é arbitrário, temos

$$\mathbb{P}[S_n \leq nx] \leq \inf_{\theta \in \mathbb{R}^+} \exp\{n\lambda(e^{-\theta/n} - 1) + \theta x\} = \inf_{\theta \in \mathbb{R}^+} \bar{g}(\theta). \quad (2.5)$$

Como

$$\bar{g}'(\theta_0) = \exp\{n\lambda(e^{-\theta_0/n} - 1) + \theta_0 x\} (-\lambda e^{-\theta_0/n} + x),$$

então,

$$\bar{g}'(\theta_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda e^{-\theta_0/n} = x \Leftrightarrow \theta_0 = -n \log\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Além disso $\bar{g}''(\theta) > 0$, logo \bar{g} assume um mínimo em θ_0 . Substituindo $\bar{g}(-n \log(x/\lambda))$ em (2.5), concluímos que

$$\mathbb{P}[S_n \leq nx] \leq \exp\{nx - n\lambda - nx \log(x/\lambda)\} = e^{-nI(x)}.$$

Para demonstrar a parte *ii*) da proposição utilizaremos as equações (2.2) e (2.4).

ii) Dado $v \in \mathbb{R}$ tal que $v > 1$, mostraremos que $\mathbb{P}[S_n \geq nv] \leq e^{-nI(v)}$. Primeiramente, vamos calcular $\mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{\theta X_1}{n}\right\}\right]$ e substituir na equação (2.2).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{\theta X_1}{n}\right\}\right] &= \int_0^\infty \exp\left\{\frac{\theta x}{n}\right\} \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty \exp\left\{\frac{\theta - n}{n} \cdot x\right\} dx \\ &= \frac{\exp\left\{\frac{\theta - n}{n} \cdot x\right\}}{\frac{\theta - n}{n}} \Bigg|_0^\infty = \begin{cases} \frac{n}{n - \theta}, & \text{se } \theta < n, \\ \frac{n}{n - \theta}, & \text{se } \theta = n, \\ \infty, & \text{se } \theta > n. \end{cases} \end{aligned}$$

Como θ é arbitrário, tomamos $\theta < n$. Então

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{\theta X_1}{n}\right\}\right] = \frac{n}{n - \theta}.$$

Substituindo em (2.2), temos que

$$\mathbb{P}[S_n \geq nv] \leq \left(\frac{n}{n - \theta}\right)^n e^{-\theta v}.$$

Novamente, como θ é arbitrário, temos que

$$\mathbb{P}[S_n \geq nv] \leq \inf_{\theta < n} \left(\frac{n}{n - \theta}\right)^n e^{-\theta v} = \inf_{\theta < n} g(\theta), \quad (2.6)$$

onde $g(\theta) = \left(\frac{n}{n - \theta}\right)^n e^{-\theta v}$. Derivando g para obter o ínfimo acima, temos

$$g'(\theta) = \left(\frac{n}{n - \theta}\right)^n e^{-\theta v} \left(\frac{n}{n - \theta} - v\right),$$

logo, $\theta = \frac{n(v - 1)}{v}$ é ponto crítico de g . Além disso $g''(\theta) > 0$, então $g\left(\frac{n(v - 1)}{v}\right)$ é mínimo da função g . Substituindo em (2.6),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n \geq nv] &\leq \left(1 - \frac{1}{n} \frac{n(v - 1)}{v}\right)^{-n} \exp\{-n(v - 1)\} \\ &= v^n \exp\{-n(v - 1)\} = \exp\{n \log v - n(v - 1)\} \\ &= \exp\{-n(v - 1 - \log v)\} = e^{-nI(v)}. \end{aligned}$$

Agora, dado $u < 1$, vamos mostrar que $\mathbb{P}[S_n \leq nu] \leq e^{-nI(u)}$. Note que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{-\theta X_1}{n}\right\}\right] &= \int_0^\infty \exp\left\{\frac{-\theta x}{n}\right\} e^{-x} dx = \frac{\exp\left\{-x\left(\frac{\theta}{n} + 1\right)\right\}}{-\left(\frac{\theta}{n} + 1\right)} \Bigg|_0^\infty \\ &= \frac{-1}{-\left(\frac{\theta}{n} + 1\right)} = \frac{n}{\theta + n}. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.4) e procedendo de maneira análoga a que fizemos acima, temos que

$$\mathbb{P}[S_n \leq nu] \leq \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \left(\frac{n}{\theta + n}\right)^n e^{\theta u} = \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \bar{g}(\theta) = \bar{g}\left(\frac{n(1-u)}{u}\right) = e^{-nI(u)}.$$

□

Com o auxílio da Proposição 2.4 provaremos o próximo resultado. Nele estimamos a quantidade média de chegadas de Poisson em grandes intervalos de tempo.

Proposição 2.5. *Seja $N_{nz}(ns, nt]$ o número de chegadas de Poisson no sítio nz no intervalo de tempo $(ns, nt]$. Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N_{nz}(ns, nt] = t - s, \quad \text{quase certamente.} \quad (2.7)$$

Observemos que o “quase certamente” acima se refere à realização dos relógios Poisson. O mesmo se aplica diversas vezes no texto que segue. Também utilizaremos a notação “q.c.” no lugar de “quase certamente”.

Primeiramente, note que pela Proposição 2.3 podemos escrever $N_{nz}(ns, nt] = X_1 + \dots + X_n$, onde os X_i 's são independentes com distribuição de Poisson de parâmetro $t - s$. Então, $N_{nz}(ns, nt]$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $n(t - s)$. Por simplicidade, denotaremos

$N_{nz}(ns, nt]$ por S_n . Mais precisamente, o significado de (2.7) é

$$\mathbb{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - (t-s) \right| \geq \varepsilon \text{ infinitas vezes} \right] = 0.$$

Demonstração. Vamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - (t-s) \right| \geq \varepsilon \text{ infinitas vezes} \right] = 0, \quad (2.8)$$

desta forma, por Borel-Cantelli, provaremos o limite quase certo (2.7).

Note que se, para $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}[S_n/n - (t-s) \geq \varepsilon \text{ infinitas vezes}] = 0 \quad (2.9)$$

e

$$\mathbb{P}[S_n/n - (t-s) \leq -\varepsilon \text{ infinitas vezes}] = 0, \quad (2.10)$$

teremos (2.8).

Provaremos primeiro (2.9). De acordo com a Proposição 2.4, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n \geq (\varepsilon + t - s)n] &\leq e^{-nI(\varepsilon+t-s)} \\ &= \exp \left\{ -n \left((\varepsilon + t - s) \log \left(\frac{\varepsilon + t - s}{t - s} \right) - \varepsilon \right) \right\} \\ &= e^{-ng(\varepsilon)}, \end{aligned}$$

onde $g(\varepsilon) = (\varepsilon + t - s) \log \left(\frac{\varepsilon + t - s}{t - s} \right) - \varepsilon$. Note que a função g é positiva, pois $g(0) = 0$ e para todo $x > 0$, temos que

$$\begin{aligned} g'(x) &= \log \left(\frac{x + t - s}{t - s} \right) + (x + t - s) \cdot \frac{t - s}{x + t - s} \cdot \frac{1}{t - s} - 1 \\ &= \log \left(\frac{x}{t - s} + 1 \right) > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left[\frac{S_n}{n} - (t-s) \geq \varepsilon \right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ng(\varepsilon)} < +\infty,$$

já que $g(\varepsilon) > 0$. Assim, pelo lema de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P} \left[\frac{S_n}{n} - (t-s) \geq \varepsilon \text{ infinitas vezes} \right] = 0.$$

Agora vamos provar (2.10). Ainda utilizando a Proposição 2.4, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n/n - (t-s) \leq -\varepsilon] &= \mathbb{P}[S_n \leq n(t-s-\varepsilon)] \leq e^{-nI(t-s-\varepsilon)} \\ &= \exp \left\{ -n \left((t-s-\varepsilon) \log \left(\frac{t-s-\varepsilon}{t-s} \right) + \varepsilon \right) \right\} \\ &= e^{-n\bar{g}(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Note que a função \bar{g} é positiva, pois $\bar{g}(0) = 0$ e para todo $x > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \bar{g}'(x) &= -\log \left(\frac{t-s-x}{t-s} \right) + (t-s-x) \cdot \frac{t-s}{t-s-x} \cdot \frac{-1}{t-s} + 1 \\ &= -\log \left(1 - \frac{x}{t-s} \right) > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left[\frac{S_n}{n} - (t-s) \leq -\varepsilon \right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\bar{g}(\varepsilon)} < +\infty,$$

já que $-n\bar{g}(\varepsilon) < 0$. Assim, pelo lema de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P} \left[\frac{S_n}{n} - (t-s) \leq -\varepsilon \text{ infinitas vezes} \right] = 0,$$

concluindo a prova.

2.3 Construção Gráfica do processo de k -exclusão totalmente assimétrico

Inicialmente, faremos a construção do processo de k -exclusão totalmente assimétrico considerando $k = 1$. Essa construção poderia ser feita utilizando apenas variáveis aleatórias e tempos de parada, mas optamos por seguir a chamada Construção Gráfica (veja [4]), que é ao mesmo tempo intuitiva e adequada para provas matematicamente rigorosas.

Seja $S = \mathbb{Z}$ e sobre cada ponto de S , ou seja, sobre cada número inteiro, distribua partículas. Chamaremos esses pontos de sítios e permitiremos, no máximo, uma partícula por sítio, já que estamos considerando $k = 1$. Uma configuração típica será denotada por η . Note que $\eta : S \rightarrow \{0, 1\}$, onde $\eta(x) = 1$ se o sítio x está ocupado e $\eta(x) = 0$ se x está vazio. Dessa forma o espaço de estados é o produto cartesiano $X = \{0, 1\}^S$.

Considere $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{P})$ o espaço de probabilidade no qual definimos a família $\{\mathcal{T}_x ; x \in S\}$ de processos de Poisson independentes de parâmetro 1 na linha do tempo $[0, \infty)$. Em cada sítio anexamos um processo de Poisson. Os tempos de salto deste processo são tempos aleatórios nos quais, se houver partícula neste sítio então ela se move para a direita. Caso contrário, se não houver partícula no sítio, nada acontece. A Figura 2.4 representa uma tentativa de salto bem sucedida. Observe que η_{t-} é a configuração das partículas exatamente antes do tempo t .

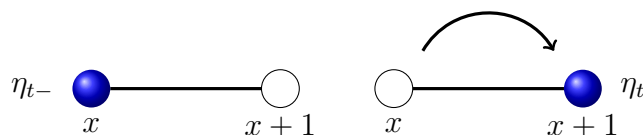


Figura 2.4: Salto no tempo t .

Vamos denotar $\eta_0 \in X$ o estado inicial do processo. Observando a Figura 2.5 coloquemos $S = \mathbb{Z}$ no eixo horizontal e para cada $x \in S$ anexemos um eixo vertical orientado para baixo, representando o processo de Poisson associado. Em cada tempo de salto t determinado por $\{\mathcal{T}_x\}$, desenhemos uma seta de (x, t) para $(x + 1, t)$. Em $t = 0$ desenhemos a configuração inicial η_0 em X .

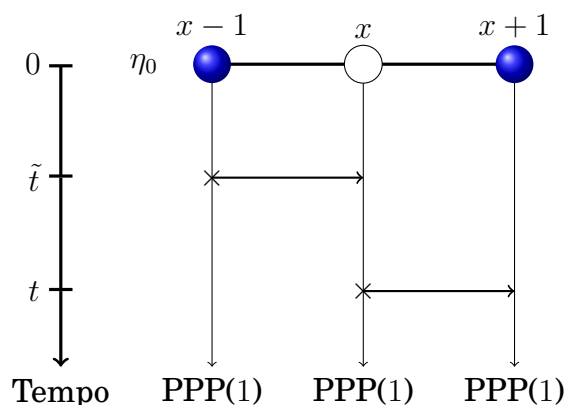


Figura 2.5: Configuração inicial do processo.

Agora, as partículas se movem verticalmente para baixo com taxa constante igual a 1. Quando a partícula encontra uma seta, se move ao longo desta seta, caso o sítio vizinho esteja desocupado, como feito na Figura 2.6. Observe que, como os tempos de espera têm distribuição contínua e são independentes, quase certamente, não haverá saltos simultâneos.

Se considerarmos k arbitrário, note que a construção do processo será análoga. Teremos

$$\eta : S \longrightarrow \{0, 1, \dots, k\},$$

e o espaço de estado será o produto cartesiano $X = \{0, 1, \dots, k\}^S$. Como os processos de Poisson estavam conectados aos sítios eles permanecem inalterados. Mas agora, em cada sítio pode haver no máximo k partículas. Desta forma os saltos de x para $x + 1$ acontecem se as seguintes

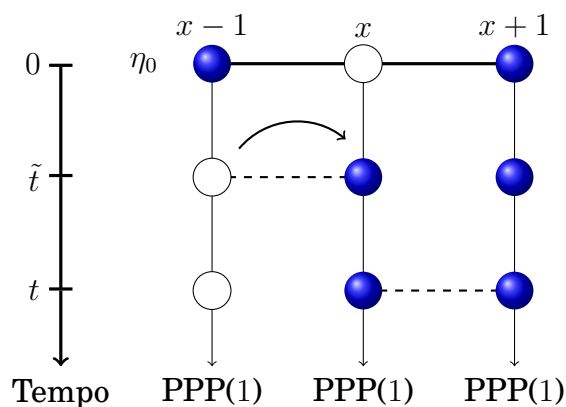


Figura 2.6: Construção do Processo de 1-Exclusão.

condições forem satisfeitas:

- (1) o sítio x tiver pelo menos uma partícula,
- (2) o sítio $x + 1$ tiver no máximo $k - 1$ partículas.

A Figura 2.7 representa um salto bem sucedido.

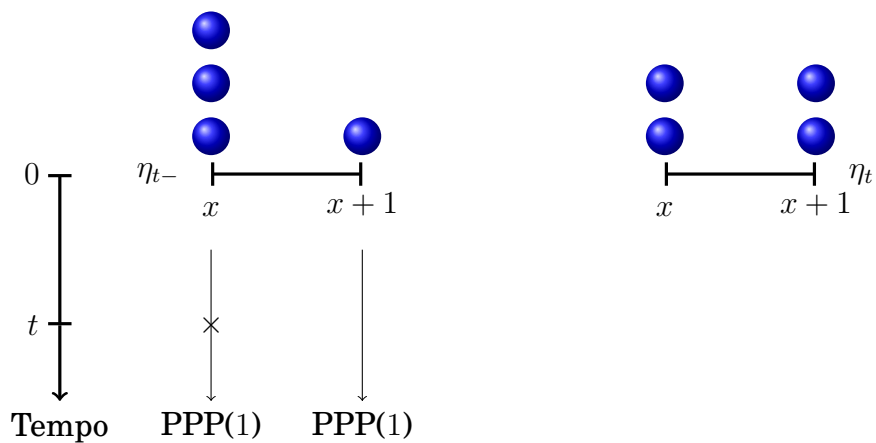


Figura 2.7: Dinâmica do processo de k -exclusão totalmente assimétrico.

Capítulo 3

Processo de alturas

Neste capítulo vamos definir e dar algumas propriedades do processo de alturas, provar seu limite hidrodinâmico e caracterizar a sua função limite.

3.1 Construção

No capítulo anterior definimos $\eta = \{\eta(x); x \in \mathbb{Z}\}$ para descrever a configuração de partículas. Agora descreveremos esta ocupação com as chamadas funções altura, definidas por

$$h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad \eta(x) = h(x) - h(x-1) \text{ e } h(0) = 0. \quad (3.1)$$

A condição $h(0) = 0$ é arbitrária. Apenas precisamos escolher um ponto inicial. Podemos definir o espaço de estados H do sistema, com k representando o incremento máximo da função altura h , como o conjunto

$$H = \{h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}; 0 \leq h(x+1) - h(x) \leq k, \forall x \in \mathbb{Z}\}.$$

Note que para cada η , a função h não é única. Porém é única a menos de uma constante. O próximo exemplo irá ilustrar essa relação.

Exemplo 3.1. *Considere η_0 uma configuração inicial de partículas e η_t sua configuração após o primeiro salto, conforme a figura a seguir.*

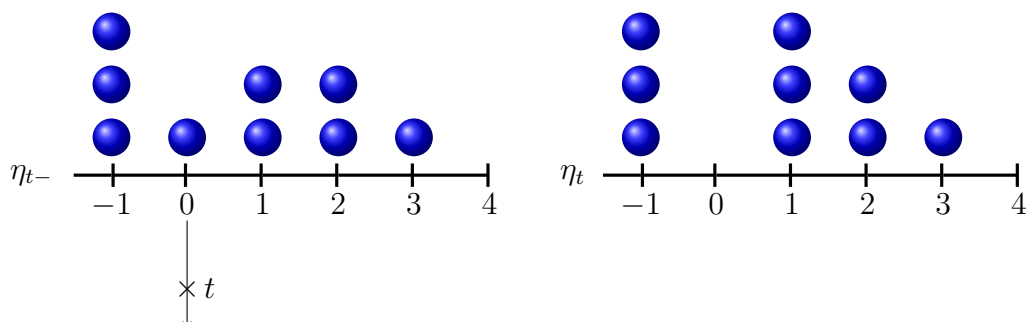


Figura 3.1: Salto da partícula no sítio 0.

A partir da configuração representada na Figura 3.1, utilizando a condição inicial $h(0) = 0$ e a equação (3.1), construímos as funções alturas, representada na Figura 3.2. Para explicitar calcularemos alguns pontos da função h_{t-} .

$$1 = \eta_{t-}(0) = h(0) - h(-1) = -h(-1) \Rightarrow h(-1) = -1$$

$$2 = \eta_{t-}(1) = h(1) - h(0) = h(1)$$

$$2 = \eta_{t-}(2) = h(2) - h(1) = h(2) - 2 \Rightarrow h(2) = 4$$

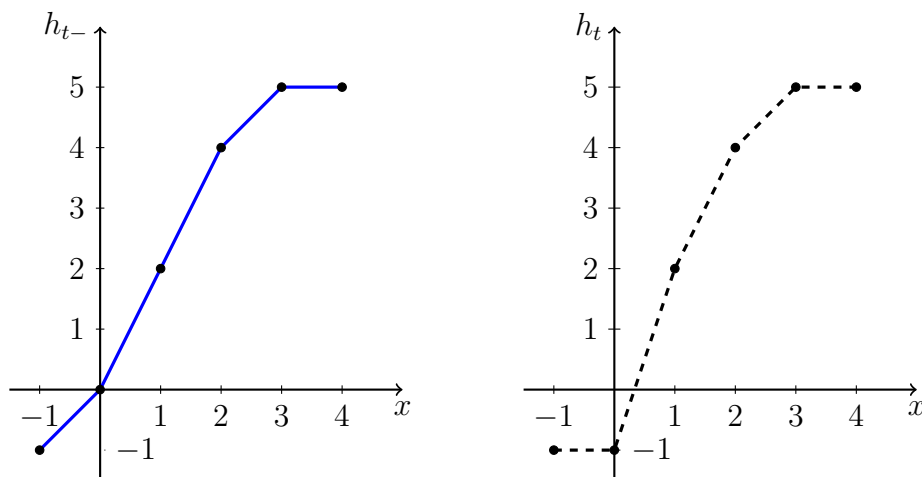


Figura 3.2: Funções altura.

Observação 3.1. *Considere $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função altura. Então para $x > y$, temos que*

$$h(x) - h(y) = \sum_{z=x}^{y-1} h(z) - h(z+1) \leq k(x-y).$$

Ao invés de usar (3.1), podemos construir separadamente o processo de k -exclusão η_t e o processo de altura h_t apenas usando os mesmos relógios de Poisson $\{\mathcal{T}_x\}$. Isto é, impondo que um tempo de salto $t_0 \in \{\mathcal{T}_x\}$ de η_t também seja um tempo de “salto” do processo h_t . Isso é o que chamamos de acoplamento, em um dos exemplos mais simples. Assim o processo $h_t = \{h_t(x); x \in \mathbb{Z}\}$ pode ser construído utilizando-se os mesmos relógios de Poisson definidos anteriormente $\{\mathcal{T}_x\}$, os quais são tomados como independentes entre si e com taxa um.

Considere $h_{t-}(x)$ o valor de $h(x)$ imediatamente antes do tempo t . A regra do “salto” é que se $t \in \{\mathcal{T}_x\}$, então

$$h_t(x) = h_{t-}(x) - 1,$$

desde que

- (i) $h_{t-}(x) > h_{t-}(x-1)$, ou seja, tenha partícula no sítio x .
- (ii) $h_{t-}(x) > h_{t-}(x+1) - k$, ou seja, tenha espaço no sítio $x+1$.

Em palavras, se o relógio de Poisson $\{\mathcal{T}_x\}$ toca no tempo t , a função altura $h_{t-}(x)$ decresce por um no sítio x , desde que $h_{t-}(x)$ ainda pertença à H . Note que quando falarmos “salto” no processo de alturas estamos nos referindo ao salto no processo de exclusão. O que ocorre de fato no processo de alturas é que a função altura, se ocorrer o salto no processo de exclusão, decresce de um no sítio em que teve a chegada de Poisson.

3.2 Propriedades do processo de alturas

Nesta seção, vamos provar duas proposições sobre acoplamento de processos de altura que serão utilizadas nas demonstrações dos principais teoremas desta dissertação. Considere a seguinte ordem parcial entre dois perfis de altura

$$h \leq \tilde{h} \iff h(x) \leq \tilde{h}(x), \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Proposição 3.1. (Atratividade.) *Suponha que os processos de altura h_t e \tilde{h}_t sejam acoplados de maneira que leiam os mesmos relógios de Poisson $\{\mathcal{T}_x\}$. Assuma que, no tempo zero, $h_0 \leq \tilde{h}_0$. Então, para todo $t \geq 0$,*

$$h_t \leq \tilde{h}_t, \quad q.c.$$

Demonstração. Seja $u \in \mathbb{Z}$ arbitrário, considere $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ os tempos em que o relógio de Poisson toca no sítio u no intervalo de tempo $(0, t]$. Mostraremos que $h_{t_1} \leq \tilde{h}_{t_1}$. Para t_2, \dots, t_n o resultado segue por indução. Observe que cada processo tem sua configuração inicial, então um “salto” pode ser permitido em um processo mas no outro não. Logo, considere os seguintes casos:

(i) Se $h(u)$ e $\tilde{h}(u)$ saltam no tempo t_1 , temos que

$$h_{t_1}(u) = h_{t_1-}(u) - 1 = h_0(u) - 1 \leq \tilde{h}_0(u) - 1 = \tilde{h}_{t_1}(u).$$

(ii) Se $h(u)$ e $\tilde{h}(u)$ não saltam no tempo t_1 , então

$$h_{t_1}(u) = h_0(u) \leq \tilde{h}_0(u) = \tilde{h}_{t_1}(u).$$

(iii) Se $h(u)$ salta no tempo t_1 , mas $\tilde{h}(u)$ não, temos que

$$h_{t_1}(u) = h_0(u) - 1 \leq \tilde{h}_0(u) - 1 < \tilde{h}_0(u) = \tilde{h}_{t_1}(u).$$

(iv) Se $\tilde{h}(u)$ salta no tempo t_1 , mas $h(u)$ não. Como $h_0 \leq \tilde{h}_0$ então

$h_0(u) = \tilde{h}_0(u) - c$ para algum c inteiro e não negativo. Se $c \geq 1$,

$$h_{t_1}(u) = h_0(u) = \tilde{h}_0(u) - c \leq \tilde{h}_0(u) - 1 = \tilde{h}_{t_1}(u).$$

Agora considere $c = 0$. Como $h(u)$ não saltou em t_1 temos que

$$h_0(u) - h_0(u - 1) = 0 \text{ ou } h_0(u + 1) - h_0(u) = k.$$

No primeiro caso, como $h_0(u - 1) \leq \tilde{h}_0(u - 1)$, concluimos que

$$0 < \tilde{h}_0(u) - \tilde{h}_0(u - 1) \leq h_0(u) - h_0(u - 1) = 0,$$

o que é uma contradição. No segundo caso, encontramos

$$k > \tilde{h}_0(u + 1) - \tilde{h}_0(u) \geq h_0(u + 1) - h_0(u) = k,$$

contradição novamente. Logo $c \geq 1$.

Portanto, para quase toda realização dos relógios de Poisson,

$$h_{t_1}(u) \leq \tilde{h}_{t_1}(u).$$

Como u é arbitrário, para todo $t \geq 0$, temos que $h_t \leq \tilde{h}_t$. □

Proposição 3.2. (Propriedade Envelope.) *Seja \mathcal{K} um conjunto enumerável de índices. Suponha que o processo h_t e a família $\{\sigma_0^k; k \in \mathcal{K}\}$, de processos de altura, são acoplados de modo que leiam os mesmos relógios de Poisson $\{\mathcal{T}_u\}$. Onde, para cada $k \in \mathcal{K}$, σ_0^k é o perfil inicial do processo de altura relacionado. Assuma que, no tempo zero,*

$$h_0(u) = \sup_{k \in \mathcal{K}} \sigma_0^k(u), \quad \forall u \in \mathbb{Z}.$$

Então, para todo $u \in \mathbb{Z}$ e $t \geq 0$,

$$h_t(u) = \sup_{k \in \mathcal{K}} \sigma_t^k(u), \quad \text{q.c.}$$

Note que, como as funções altura tomam valores inteiros, a suposi-

ção na proposição acima garante que, para todo $u \in \mathbb{Z}$, existe $k = k(u)$ para o qual $h_0(u) = \sigma_0^k(u)$. Esta observação é fundamental na demonstração.

Demonstração. Seja $u \in \mathbb{Z}$ arbitrário e considere $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ os tempos em que o relógio de Poisson toca no sítio u no intervalo de tempo $(0, t]$. Note que, como para todo $k \in \mathcal{K}$ temos que $h_0(u) \geq \sigma_0^k(u)$ e h_t é acoplado com $\{\sigma_0^k; k \in \mathcal{K}\}$, pela propriedade de atratividade, $h_t(u) \geq \sigma_t^k(u) \forall k \in \mathcal{K}$. Resta mostrar que para cada t_i , existe $k \in \mathcal{K}$ tal que $h_{t_i}(u) = \sigma_{t_i}^k(u)$. Vamos mostrar para t_1 . Para os outros tempos, o resultado segue por indução. Considere os casos:

(i) Se $h(u)$ salta em t_1 , temos que, para algum $k \in \mathcal{K}$, $h_0(u) = \sigma_0^k(u)$. Além disso $h_{t_1}(u) \geq \sigma_{t_1}^k(u)$. Portanto,

$$\sigma_0^k(u) = h_0(u) = h_{t_1}(u) + 1 \geq \sigma_{t_1}^k(u) + 1 > \sigma_{t_1}^k(u),$$

então $\sigma^k(u)$ também salta em t_1 . Logo,

$$h_{t_1}(u) = h_0(u) - 1 = \sigma_0^k(u) - 1 = \sigma_{t_1}^k(u).$$

(ii) Se $h(u)$ não salta em t_1 devido a ocorrer a condição $h_0(u+1) - h_0(u) = k$, temos que, para algum $l \in \mathcal{K}$, $h_0(u+1) = \sigma_0^l(u+1)$ e $h_0(u) \geq \sigma_0^l(u)$. Portanto

$$k = h_0(u+1) - h_0(u) \leq \sigma_0^l(u+1) - \sigma_0^l(u) \leq k,$$

então $\sigma^l(u)$ não salta em t_1 e

$$h_{t_1}(u) = h_0(u) = \sigma_0^l(u) = \sigma_{t_1}^l(u).$$

(iii) Se $h(u)$ não salta em t_1 porque vale $h_0(u) - h_0(u-1) = 0$, temos que, para algum $m \in \mathcal{K}$, $h_0(u-1) = \sigma_0^m(u-1)$. Então

$$0 = h_0(u) - h_0(u-1) \geq \sigma_0^m(u) - \sigma_0^m(u-1) \geq 0,$$

portanto $\sigma^m(u)$ não salta em t_1 e

$$h_{t_1}(u) = h_0(u) = \sigma_0^m(u) = \sigma_{t_1}^m(u).$$

Logo, para todo $t > 0$ existe $k \in \mathcal{K}$ tal que $h_t(u) = \sigma_t^k(u)$. Assim $h_t(u) = \sup_{k \in \mathcal{K}} \sigma_t^k(u)$. \square

3.3 Lei dos grandes números para a função altura

Iniciaremos esta seção enunciando o Teorema Ergódico Sub-aditivo de Kingman, originalmente publicado em [5]. Ele será a chave para a prova da Lei dos Grandes Números para a função altura. Para uma prova deste importante resultado, sugerimos [2, Seção 6.6] ou o artigo original [5].

Teorema 3.1 (Teorema Ergódico Sub-aditivo de Kingman). *Suponha que a sequência dupla de variáveis aleatórias indexadas por m e n*

$$\{X_{n,m}; 0 \leq m < n\}$$

satisfaça as seguintes propriedades:

- (1) $X_{m,0} + X_{n,m} \geq X_{n,0}$.
- (2) Para cada ℓ fixado, o processo $\{X_{(n+1)\ell, n\ell}; n \geq 1\}$ é estacionário e ergódico.
- (3) A distribuição da sequência $\{X_{m+k,m}; k \geq 1\}$ é a mesma para todos os valores de m .
- (4) $\mathbb{E}[X_{1,0}^+] < \infty$, e $\gamma = \inf_n n^{-1}\mathbb{E}[X_{n,0}] > -\infty$.

Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}X_{n,0} = \gamma, \text{ q.c. e em } L^1.$$

A próxima proposição mostra uma propriedade das variáveis aleatórias com distribuição exponencial que será utilizada na demonstração da Proposição 3.4 à frente.

Proposição 3.3 (Paradoxo do Tempo de Espera). *Sejam $(\tau_i)_{i \geq 1}$ variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$ e $T_0 = 0$. Fixe $t_0 > 0$ e defina a variável aleatória Y por*

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} (T_n - t_0) \mathbb{1}_{[T_{n-1} \leq t_0 < T_n]}.$$

Então Y tem distribuição exponencial de parâmetro λ .

Antes de iniciar a demonstração notamos que Y corresponde, simplesmente, ao tempo decorrido após $t = t_0$ até a próxima chegada do processo de Poisson. Abaixo, ilustramos Y . O "Paradoxo do Tempo de Espera" vem do fato de Y ter a mesma distribuição de T_1 , ou $T_2 - T_1$, ou $T_3 - T_2$, etc. Por outro lado, como vemos na Figura 3.3, Y é estritamente menor do que um certo intervalo $T_n - T_{n-1}$.

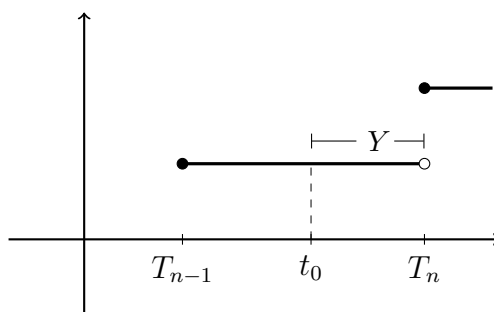


Figura 3.3: Representação gráfica de Y .

Demonstração. Faremos um cálculo muito semelhante ao da Proposição 2.2. Vamos calcular a função de distribuição de Y . Note que Y assume apenas valores positivos.

Seja $s > 0$. Então

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y > s] &= \mathbb{P}\left([Y > s] \cap \bigcup_{n=1}^{+\infty} [T_{n-1} \leq t_0 < T_n]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [Y > s] \cap [T_{n-1} \leq t_0 < T_n]\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y > s] \cap [T_{n-1} \leq t_0 < T_n]),\end{aligned}$$

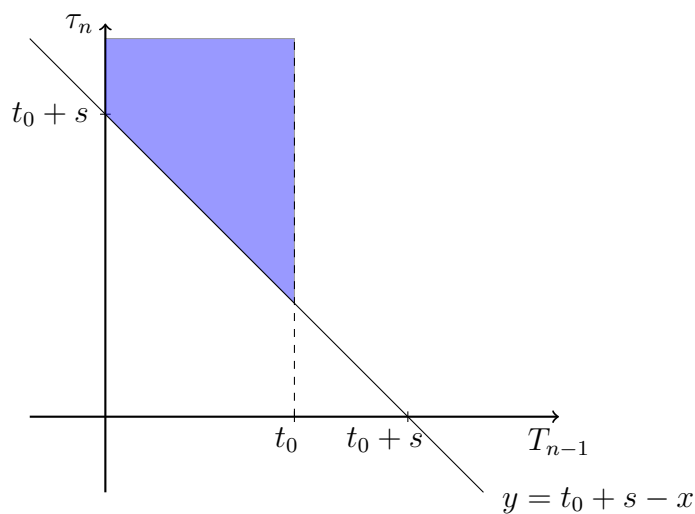
onde a última igualdade se deve ao fato dos eventos $[T_{n-1} \leq t_0 < T_n]$ serem disjuntos para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, observe que se $t_0 \in [T_{n-1}, T_n)$, então $Y = T_n - t_0$. Desta forma,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y > s] \cap [T_{n-1} \leq t_0 < T_n]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_n > t_0 + s] \cap [T_{n-1} \leq t_0 < T_n]) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_n > t_0 + s] \cap [T_{n-1} \leq t_0]) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_{n-1} + \tau_n > t_0 + s] \cap [T_{n-1} \leq t_0]),\end{aligned}$$

já que $T_n = T_{n-1} + \tau_n$. Denotaremos por A_n o conjunto $[T_{n-1} + \tau_n > t_0 + s] \cap [T_{n-1} \leq t_0]$. A seguir, calcularemos $\mathbb{P}(A_n)$.

Como τ_n tem distribuição exponencial com parâmetro λ , então $T_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i$ tem distribuição Gamma com parâmetros $n-1$ e λ , para uma prova deste fato bem conhecido veja [1]. Logo, a função densidade do vetor aleatório (T_{n-1}, τ_n) é dada por

$$f_{(T_{n-1}, \tau_n)}(x, y) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} \lambda e^{-\lambda y} = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!}.$$



$$\blacksquare A_n = [T_{n-1} + \tau_n > t_0 + s] \cap [T_{n-1} \leq t_0].$$

Figura 3.4: Representação gráfica do conjunto A_n .

A parte em azul da Figura 3.4 nos informa os limites de integração. Portanto,

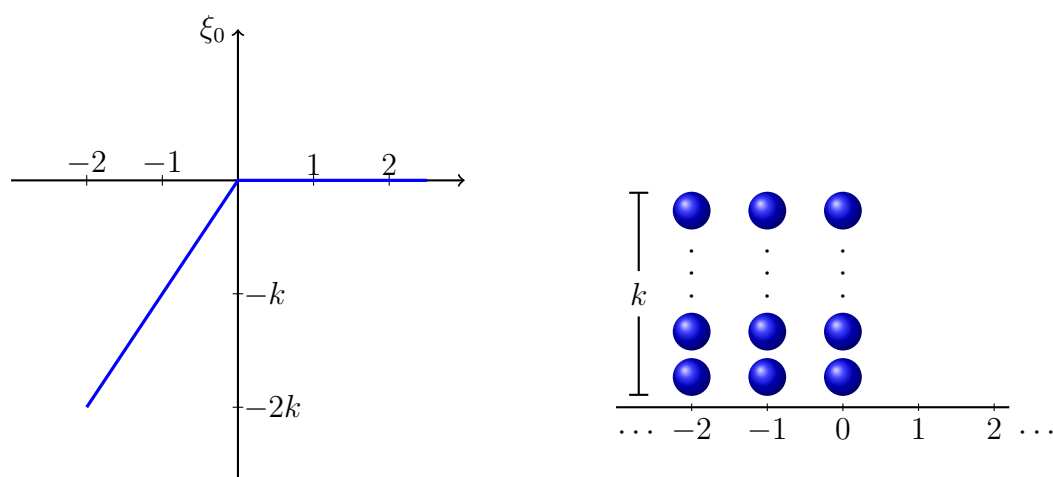
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \int_0^{t_0} \int_{t_0+s-x}^{+\infty} f_{(T_{n-1}, \tau_n)}(x, y) dy dx \\ &= \int_0^{t_0} \int_{t_0+s-x}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} dy dx \\ &= \int_0^{t_0} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} \left(-e^{-\lambda(x+y)} \Big|_{t_0+s-x}^{+\infty} \right) dx \\ &= \int_0^{t_0} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda(t_0+s)} dx = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} e^{-\lambda(t_0+s)} \left(\frac{x^{n-1}}{n-1} \Big|_0^{t_0} \right) \\ &= \frac{(\lambda t_0)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(t_0+s)}. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}[Y > s] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$, podemos concluir que

$$\mathbb{P}[Y > s] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t_0)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(t_0+s)} = e^{\lambda t_0} e^{-\lambda(t_0+s)} = e^{-\lambda s},$$

então Y tem distribuição exponencial de parâmetro λ . \square

O próximo resultado também será utilizado para a prova de uma Lei dos Grandes Números para a função altura. Considere $\xi_0 \in H$ tal que $\xi_0(x) = k(x \wedge 0)$, onde $x \wedge 0$ significa “o menor elemento entre x e 0”. Este perfil é o elemento de H que satisfaz $\xi_0(0) = 0$ e $\xi_0 \leq h$ para qualquer $h \in H$ tal que $h(0) = 0$. Essa notação para o perfil minimal será utilizada diversas vezes ao longo do texto. Observe na Figura 3.5 a representação do perfil minimal como função altura e sua configuração correspondente no processo de exclusão.



— Processo de altura inicial

Figura 3.5: Relação do perfil minimal com a configuração de partículas.

Proposição 3.4. *Considere ξ processo de alturas tal que sua configuração inicial é a função minimal ξ_0 . Então, para cada $t > 0$ e $x \in \mathbb{Z}$ com $|x| > t$, temos que*

$$\mathbb{P}[\xi_t(x) < \xi_0(x)] \leq \exp \{ -x \cdot I(t/x) \}. \quad (3.2)$$

Onde $I(x) = x - 1 - \log x$ é a chamada função taxa de Cramér para grandes desvios de variáveis aleatórias exponenciais de parâmetro 1.

Demonstração. Vamos provar a desigualdade (3.2) primeiramente para $x \in \mathbb{Z}_+$. Considere

$$T_x = \inf \{t > 0; \xi_t(x) < \xi_0(x)\},$$

ou seja, o tempo do primeiro salto no sítio x . Observando a Figura 3.6, defina \tilde{T}_0 o tempo do primeiro salto no sítio 0, \tilde{T}_1 o tempo do primeiro salto no sítio 1 após o tempo \tilde{T}_0 e assim sucessivamente até o tempo \tilde{T}_x .

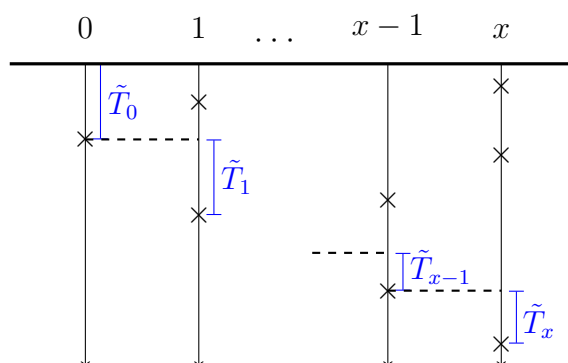


Figura 3.6: Tempos de saltos.

Como o tempo entre as chegadas dos processos Poisson em um sítio tem distribuição exponencial de média 1, pela Proposição 3.3 e a independência entre os relógios de Poisson, concluímos que \tilde{T}_i tem distribuição exponencial de média 1 para todo $i \in \mathbb{N}$. Além disso, $T_x = \tilde{T}_0 + \dots + \tilde{T}_x$. Note que, se tiver ocorrido algum salto no sítio x até o tempo t , teremos $\xi_t(x) < \xi_0(x)$, assim

$$\mathbb{P}[\xi_t(x) < \xi_0(x)] = \mathbb{P}[T_x \leq t] = \mathbb{P}\left[T_x \leq x \cdot \frac{t}{x}\right].$$

Como $x > t$ temos que $t/x < 1$. Logo, utilizando a Proposição 2.4,

$$\mathbb{P}[\xi_t(x) < \xi_0(x)] \leq \exp\{-x \cdot I(t/x)\}.$$

Para o caso em que $-x \in \mathbb{Z}_-$, o raciocínio é análogo. Basta considerar \tilde{T}_1 como o tempo do primeiro salto no sítio -1 e assim suces-

sivamente até o sítio $-x$, portanto, $T_x = \tilde{T}_0 + \dots + \tilde{T}_{-x}$ e o resultado segue. \square

Agora que temos todas as ferramentas necessárias, podemos demonstrar uma Lei dos Grandes Números para a função altura com perfil inicial minimal. Tal limite é conhecido na literatura como limite hidrodinâmico.

Teorema 3.2 (Lei dos Grandes Números para a função altura). *Existe uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 0]$ tal que, para quase toda realização de relógios de Poisson temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \xi_{nt}(\lfloor nx \rfloor) = t \cdot g\left(\frac{x}{t}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0,$$

onde ξ_t é o processo de altura que possui como perfil inicial o perfil minimal. Além disso, a função g é côncava, Lipschitz e satisfaz

$$g(x) = k(x \wedge 0) = \xi_0(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > 1$.

Observe que $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro tal que $\lfloor x \rfloor \leq x$. No intervalo $(-1, 1)$, a expressão para a função g não é conhecida. Mas já que g é Lipschitz e côncava, sabemos seu esboço e a representamos na Figura 3.7.

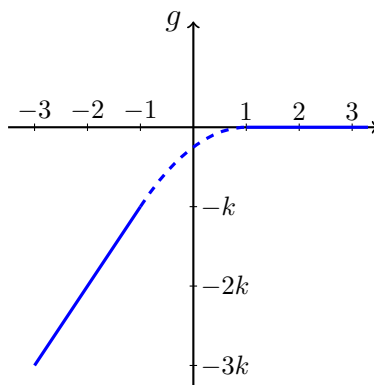


Figura 3.7: Representação gráfica da função g .

A demonstração deste teorema é bem longa, então daremos um roteiro de prova a seguir para guiar a leitura:

- Existência do limite para $z \in \mathbb{Z}$, através do Teorema Ergódico Sub-aditivo de Kingman.
- Existência do limite para $q \in \mathbb{Q}$.
- A função g_0 é Lipschitz.
- Existência do limite para $x \in \mathbb{R}$.
- A função g é côncava e $g(x) = k(x \wedge 0)$ para $|x| > 1$.

Demonstração do Teorema 3.2. Mostraremos inicialmente que para $z \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \xi_{nt}(nz) = g_0(z, t), \quad \text{q.c.}$$

para alguma função $g : \mathbb{Z} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Considere ξ_t processo de alturas tal que $\{\mathcal{T}_x; x \in \mathbb{Z}\}$ são seus relógios de Poisson e $\xi_0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$; $\xi_0(x) = k(x \wedge 0)$ seu perfil inicial. Note que ξ_0 é o perfil minimal. Defina $X_{n,0} := -\xi_{nt_0}(nz)$ para $z \in \mathbb{Z}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ fixos. Com o auxílio do Teorema 3.1 mostraremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} X_{n,0} = \gamma.$$

Faremos isso verificando os quatro itens especificados no enunciado do Teorema 3.1.

(1): Temos que $X_{n,0} = -\xi_{nt_0}(nz)$, $X_{m,0} = -\xi_{mt_0}(mz)$ e considere $m < n$. Neste caso, como o processo de alturas é não-crescente, $X_{m,0} \leq X_{n,0}$. Observando a Figura 3.8, defina

$$\sigma_0^m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad \sigma_0^m(x) := \begin{cases} -X_{m,0}, & \text{se } x > mz \\ k(x - mz) - X_{m,0}, & \text{se } x \leq mz \end{cases},$$

com $\sigma_0^m(x)$ obedecendo o relógio de Poisson $\theta_{mt_0} \mathcal{T}_x$, ou seja, obedecendo o relógio de Poisson \mathcal{T}_x a partir do tempo mt_0 . Temos que σ_0^m é o perfil

minimal trasladado. Observe que σ_0^m é simplesmente o perfil minimal trasladado para um certo ponto, como mostra a Figura 3.8.

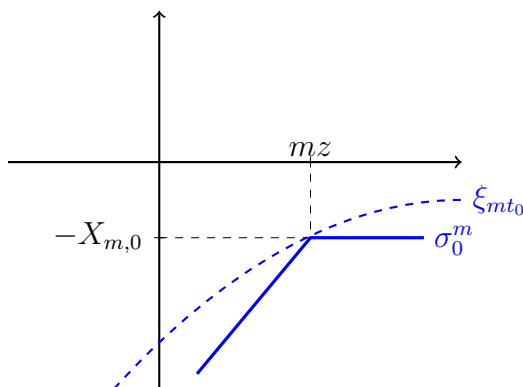


Figura 3.8: Perfil minimal trasladado.

Note que $\sigma_0^m(x) \leq \xi_{mt_0}(x)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Como a partir do tempo mt_0 , os processos σ^m e ξ leem os mesmos relógios de Poisson, pela Proposição 3.1 temos que, para todo $t \geq 0$, $\sigma_t^m \leq \xi_{t+mt_0}$, quase certamente. Em particular, no tempo $t = (n-m)t_0$, temos que

$$\sigma_{(n-m)t_0}^m(x) \leq \xi_{nt_0}(x), \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$\sigma_{(n-m)t_0}^m(nz) \leq \xi_{nt_0}(nz) = -X_{n,0}. \quad (3.3)$$

Na Figura 3.9 podemos observar como as funções ξ e σ^m se relacionam com o passar do tempo. Por fim, defina $-X_{n,m} := \sigma_{(n-m)t_0}^m(nz) + X_{m,0}$. Pela desigualdade (3.3) concluímos que

$$X_{n,0} \leq X_{m,0} + X_{n,m}.$$

(2): Para cada l fixado, o processo $\{X_{(n+1)l, nl}; n \geq 1\}$ é estacionário e ergódico pois o processo pontual de Poisson é ergódico e estacionário. Para mais informações ver [2, Capítulo 7, Página 328] e [2, Capítulo 7, Página 330].

(3): Como $X_{m+k,m}$ e $X_{m+k-m,0} = X_{k,0}$ tem a mesma distribuição, en-

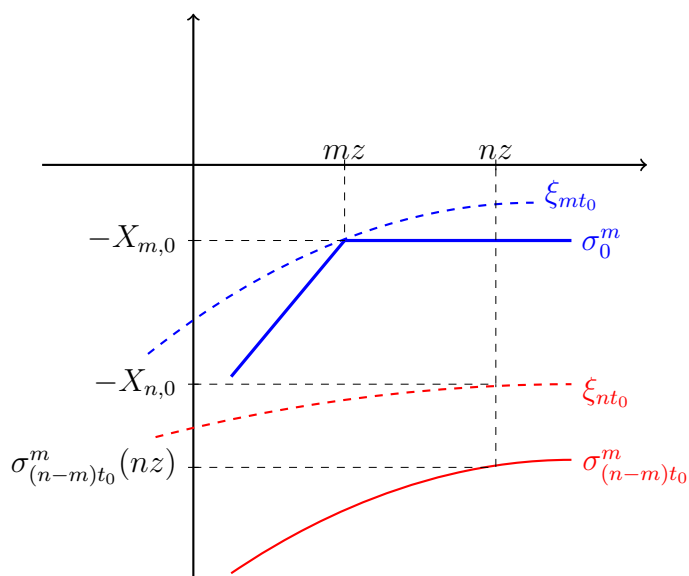


Figura 3.9: Evolução no tempo de ξ e σ^m .

tão a sequência $\{X_{m+k,m}; k \geq 1\}$ possui a mesma distribuição para todos os valores de m , já que independe de m .

(4): No tempo t_0 houve $N_{t_0}(z)$ chegadas do processo Poisson no sítio z , mas não necessariamente em todas ocorreram salto. Portanto

$$-\xi_{t_0}(z) \leq N_{t_0}(z), \text{ q.c.}$$

Assim,

$$\mathbb{E}[X_{1,0}] = \mathbb{E}[-\xi_{t_0}(z)] \leq \mathbb{E}[N_{t_0}(z)] = \lambda \Rightarrow \mathbb{E}[X_{1,0}^+] < +\infty.$$

Além disso, como $X_{n,0} = -\xi_{nt_0}(nz) \geq 0$, então $\mathbb{E}[X_{n,0}] \geq 0$.

Dessa forma, pelo Teorema 3.1, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}X_{n,0} = \gamma$ e variando t e z podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \xi_{nt}(nz) = g_0(z, t), \text{ q.c. para } (z, t) \in \mathbb{Z} \times [0, \infty).$$

Agora, vamos mostrar que vale o mesmo limite para q racional, ou

seja, para $q \in \mathbb{Q}$ podemos definir $g_0(q, t)$ de maneira que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \xi_{nt}(\lfloor nq \rfloor) = g_0(q, t), \quad \text{q.c.} \quad (3.4)$$

Primeiramente note que, para $m \in \mathbb{Z}_+$, $z \in \mathbb{Z}$ e tomando $M = nm$,

$$g_0(mz, mt) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \xi_{nmt}(nmz) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{m}{M} \cdot \xi_{Mt}(Mz) = mg_0(z, t). \quad (3.5)$$

Considere $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q = \frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e defina

$$g_0(q, t) = \frac{1}{m} g_0(mq, mt),$$

com m múltiplo de b . Desta forma, g_0 está bem definida para $q \in \mathbb{Q}$. De fato, tome $m_1 = k_1 b$ e $m_2 = k_2 b$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+$, então

$$g_0(q, t) = \frac{1}{m_1} \cdot g_0(m_1 q, m_1 t) = \frac{1}{k_1 b} \cdot g_0(k_1 a, k_1 b t).$$

Como $k_1 \in \mathbb{Z}_+$, por (3.5)

$$\frac{1}{k_1 b} \cdot g_0(k_1 a, k_1 b t) = \frac{k_1}{k_1 b} \cdot g_0(a, b t) = \frac{1}{b} \cdot g_0(a, b t).$$

Por outro lado,

$$g_0(q, t) = \frac{1}{m_2} \cdot g_0(m_2 q, m_2 t) = \frac{1}{k_2 b} \cdot g_0(k_2 a, k_2 b t) = \frac{1}{b} \cdot g_0(a, b t),$$

já que $k_2 \in \mathbb{Z}_+$. Portanto $g_0(rq, rt) = r g_0(q, t)$, $\forall q \in \mathbb{Q}$ e $r \in \mathbb{Q}^+$.

Fixe $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $mq \in \mathbb{Z}$. Então o limite (3.4) é satisfeito tomando a subsequência $n = \ell m$ com $\ell \rightarrow +\infty$. De fato

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \xi_{nt}(\lfloor nq \rfloor) = \frac{1}{m} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \cdot \xi_{\ell mt}(\ell mq) = \frac{1}{m} \cdot g_0(mq, mt) = g_0(q, t). \quad (3.6)$$

Tome $n = \ell m + j$ com $0 \leq j < m$. Então

$$\begin{aligned} |n^{-1}\xi_{nt}(\lfloor nq \rfloor) - g_0(q, t)| &\leq |n^{-1}\xi_{nt}(\lfloor nq \rfloor) - n^{-1}\xi_{nt}(\ell m q)| \\ &\quad + |n^{-1}\xi_{nt}(\ell m q) - n^{-1}\xi_{\ell m t}(\ell m q)| \\ &\quad + |n^{-1}\xi_{\ell m t}(\ell m q) - g_0(q, t)|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Analisaremos cada termo do lado direito da desigualdade acima separadamente. No primeiro termo, note que, como ξ é uma função altura, pela Observação 3.1,

$$\begin{aligned} |n^{-1}\xi_{nt}(\lfloor nq \rfloor) - n^{-1}\xi_{nt}(\ell m q)| &\leq \frac{k}{n} |\lfloor nq \rfloor - \ell m q| = \frac{k}{n} |\lfloor \ell m q + jq \rfloor - \ell m q| \\ &\leq \frac{kjq}{n} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

No segundo termo do lado direito de (3.7), quando $n \rightarrow \infty$,

$$|n^{-1}\xi_{nt}(\ell m q) - n^{-1}\xi_{\ell m t}(\ell m q)| \leq \frac{N_{\ell m q}(\ell m t, nt]}{n} \longrightarrow 0, \text{ q.c.},$$

onde $N_{\ell m q}(\ell m t, nt]$ é o número de chegadas de Poisson no sítio $\ell m q$ no intervalo de tempo $(\ell m t, nt]$. E por (3.6), o terceiro termo do lado direito da desigualdade (3.7),

$$|n^{-1}\xi_{\ell m t}(\ell m q) - g_0(q, t)| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty, \text{ q.c.}$$

Portanto $|n^{-1}\xi_{nt}(\lfloor nq \rfloor) - g_0(q, t)| \longrightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, quase certamente. Logo, o limite (3.4) é satisfeito.

Agora, observe que, fixados $n \in \mathbb{N}$, $t > s > 0$ e $z \in \mathbb{Z}$ temos

$$\xi_{ns}(nz) \geq \xi_{nt}(nz),$$

já que a função ξ decresce no tempo. Além disso, $\xi(nz)$ vai decrescer, no máximo, $N_{nz}(ns, nt]$ vezes no intervalo de tempo $(ns, nt]$, pois nem todas as vezes que o relógio de Poisson toca acontece o salto. Então

$$\xi_{ns}(nz) \geq \xi_{nt}(nz) \geq \xi_{ns}(nz) - N_{nz}(ns, nt]. \quad (3.8)$$

Dividindo a desigualdade por n e tomando o limite em n , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_{ns}(nz)}{n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_{nt}(nz)}{n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_{ns}(nz)}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{nz}(ns, nt)}{n}.$$

Pela Proposição 2.5 e o limite (3.4),

$$g_0(z, s) \geq g_0(z, t) \geq g_0(z, s) - (t - s). \quad (3.9)$$

Com isso, mostraremos que g_0 definida em $\mathbb{Q} \times [0, \infty)$ é Lipschitz.

i) g_0 é Lipschitz com relação ao tempo. Para $t > s > 0$, $z \in \mathbb{Z}$ e utilizando a desigualdade (3.9) temos,

$$g_0(z, t) - g_0(z, s) \geq -(t - s)$$

e

$$g_0(z, s) + (t - s) \geq g_0(z, s) \geq g_0(z, t) \Rightarrow (t - s) \geq g_0(z, t) - g_0(z, s).$$

Portanto

$$|g_0(z, t) - g_0(z, s)| \leq |t - s|.$$

ii) g_0 é Lipschitz com relação ao espaço. Para $p, q \in \mathbb{Q}$ e $t > 0$ temos,

$$\begin{aligned} |g_0(q, t) - g_0(p, t)| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{-1} \xi_{nt}(\lfloor nq \rfloor) - n^{-1} \xi_{nt}(\lfloor np \rfloor)) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \left| \xi_{nt}(\lfloor nq \rfloor) - \xi_{nt}(\lfloor np \rfloor) \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} \left| \lfloor nq \rfloor - \lfloor np \rfloor \right| = k|q - p|, \end{aligned}$$

onde a desigualdade decorre da Observação 3.1.

Como g_0 é Lipschitz em cada coordenada, então g_0 é Lipschitz. Assim, podemos estender g_0 definida em $\mathbb{Q} \times [0, \infty)$ de maneira única e contínua em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Falta mostrar que para $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, g_0 satisfaz o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \xi_{nt}(\lfloor nx \rfloor) = g_0(x, t), \quad \text{q.c.} \quad (3.10)$$

Considere Ω_0 o evento tal que o limite acima é válido para todo $(q, t) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$, logo $\mathbb{P}(\Omega_0^c) = 0$. Mostraremos agora que, no evento Ω_0 , o limite (3.10) é válido para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Sejam $x, t \in \mathbb{R}$ e $q, s \in \mathbb{Q}$, com $s > t > 0$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\xi_{nt}(\lfloor nx \rfloor)}{n} - g_0(x, t) \right| &\leq \left| \frac{\xi_{nt}(\lfloor nx \rfloor)}{n} - \frac{\xi_{ns}(\lfloor nx \rfloor)}{n} \right| + \left| \frac{\xi_{ns}(\lfloor nx \rfloor)}{n} - g_0(x, s) \right| \\ &\quad + |g_0(x, s) - g_0(x, t)|, \end{aligned} \quad (3.11)$$

e analisaremos cada parcela separadamente. Na primeira parcela do lado direito da desigualdade (3.11), utilizando (3.8), temos que

$$\left| \frac{\xi_{nt}(\lfloor nx \rfloor)}{n} - \frac{\xi_{ns}(\lfloor nx \rfloor)}{n} \right| \leq \frac{N_{\lfloor nx \rfloor}(nt, ns)}{n} \rightarrow (t - s) \quad (3.12)$$

quando $n \rightarrow +\infty$, pela Proposição 2.5. Na segunda parcela do lado direito da desigualdade (3.11), utilizando a Observação 3.1 e o fato de g_0 ser Lipschitz no espaço, temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\xi_{ns}(\lfloor nx \rfloor)}{n} - g_0(x, s) \right| &\leq \left| \frac{\xi_{ns}(\lfloor nx \rfloor)}{n} - \frac{\xi_{ns}(\lfloor nq \rfloor)}{n} \right| + \left| \frac{\xi_{ns}(\lfloor nq \rfloor)}{n} - g_0(q, s) \right| \\ &\quad + |g_0(q, s) - g_0(x, s)| \\ &\leq \frac{k}{n} |\lfloor nx \rfloor - \lfloor nq \rfloor| + \left| \frac{\xi_{ns}(\lfloor nq \rfloor)}{n} - g_0(q, s) \right| + k|q - x|. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow +\infty$, e utilizando o limite (3.4),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\xi_{ns}(\lfloor nx \rfloor)}{n} - g_0(x, s) \right| \leq 2k|x - q|, \quad (3.13)$$

Por fim, na terceira parcela do lado direito da desigualdade (3.11), como g_0 é Lipschitz com relação ao tempo, obtemos

$$|g_0(x, s) - g_0(x, t)| \leq (t - s). \quad (3.14)$$

Voltando em (3.11) e utilizando (3.12), (3.13) e (3.14),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\xi_{nt}(\lfloor nx \rfloor)}{n} - g_0(x, t) \right| \leq 2(t - s) + 2k|x - q|.$$

Note que essa desigualdade é válida para qualquer $(q, s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$. Logo, para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, \infty)$ podemos tomar seqüências de racionais convergindo para t e x . Dessa forma, temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\xi_{nt}(\lfloor nx \rfloor)}{n} - g_0(x, t) \right| = 0.$$

Logo, o limite (3.10) é satisfeito. Agora, defina uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = g_0(x, 1)$, então,

$$g_0(x, t) = tg_0\left(\frac{x}{t}, 1\right) = tg\left(\frac{x}{t}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0,$$

assim obtemos o limite desejado.

Para concluir o teorema, resta verificar que a função g é côncava e que para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > 1$, vale que $g(x) = k(x \wedge 0)$.

Mostraremos que a função g_0 é subaditiva, o que implicará a concavidade. Sabemos que, para qualquer escolha de $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $n > m$, temos a desigualdade

$$X_{n,0} \leq X_{m,0} + X_{n-m,0},$$

onde $X_{n,0} = -\xi_{nt_0}(nz)$ para $z \in \mathbb{Z}$ e $t_0 > 0$ fixados, como já foi definido. Como $X_{n,m}$ e $X_{n-m,0}$ possuem a mesma função de distribuição, temos que

$$X_{n,0} \leq X_{m,0} + X_{n-m,0}.$$

Portanto,

$$-\xi_{nt_0}(nz) \leq -\xi_{mt_0}(mz) - \xi_{(n-m)t_0}((n-m)z),$$

tomando $n = \ell$, $m = \lfloor \alpha \ell \rfloor$ com $0 < \alpha < 1$ e dividindo a desigualdade por

ℓ , temos que,

$$-\ell^{-1}\xi_{\ell t_0}(\ell z) \leq -\ell^{-1}\xi_{[\alpha\ell]t_0}([\alpha\ell]z) - \ell^{-1}\xi_{(\ell-[\alpha\ell])t_0}((\ell-[\alpha\ell])z).$$

Tomando $\ell \rightarrow +\infty$, obtemos

$$-g_0(z, t_0) \leq -g_0(\alpha z, \alpha t_0) - g_0((1-\alpha)z, (1-\alpha)t_0).$$

Logo,

$$g_0(\alpha z, \alpha t_0) - g_0(z, t_0) \leq g_0((\alpha-1)z, (\alpha-1)t_0).$$

Assim, a função g_0 é subaditiva em \mathbb{Q} , já que $mz/n \in \mathbb{Q}$. Como g_0 é Lipschitz, podemos estender a subaditividade para $x \in \mathbb{R}$. Logo, g_0 é subaditiva para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $t > 0$. Agora, tomemos $\beta \in (0, 1)$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Mostraremos a concavidade de g .

$$\begin{aligned} \beta g(x) + (1-\beta)g(y) &= \beta g_0(x, 1) + (1-\beta)g_0(y, 1) \\ &= g_0(\beta x, \beta) + g_0((1-\beta)y, 1-\beta) \leq g_0(\beta x + (1-\beta)y, 1) \\ &= g(\beta x + (1-\beta)y). \end{aligned}$$

Portanto g é côncava.

Para verificar que $g(x) = k(x \wedge 0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > 1$, considere a Proposição 3.4. Logo, para $nt > 0$ e $u \in \mathbb{Z}$ com $|u| > nt$, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[\xi_{nt}(u) < \xi_0(u)] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ -u \cdot I \left(\frac{nt}{u} \right) \right\}. \quad (3.15)$$

Observe que, visto como função de u , a função $I \left(\frac{nt}{u} \right) = \frac{nt}{u} - 1 - \log \left(\frac{nt}{u} \right)$ é positiva, pois derivando a função I com relação a variável u temos que

$$\frac{dI}{du} = -\frac{nt}{u^2} + \frac{u}{nt} \cdot \frac{nt}{u^2} = \frac{u-nt}{u^2} > 0 \iff u > nt,$$

quando $u = nt$, $I(1) = 0$. Portanto, a série do lado direito da desigualdade (3.15) é finita. Logo, a soma do lado esquerdo também é finita. Pelo lema de Borel-Cantelli, podemos concluir que

$$\mathbb{P}[\xi_{nt}(u) < \xi_0(u) \text{ infinitas vezes}] = 0,$$

ou seja, a partir de um $n_0 \in \mathbb{N}$, $\xi_{nt}(u) = \xi_0(u)$ quase certamente para $n > n_0$ e $u \in \mathbb{Z}$ tal que $|u| > nt$. Tomando $t = 1$ e $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > 1$, vale $\lfloor nx \rfloor > n$. Assim, podemos concluir que $\xi_n(\lfloor nx \rfloor) = \xi_0(\lfloor nx \rfloor)$ quase certamente para $n > n_0$. Daí,

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_n(\lfloor nx \rfloor)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_0(\lfloor nx \rfloor)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(\lfloor nx \rfloor \wedge 0)}{n} = k(x \wedge 0).$$

□

Observação 3.2. A função g definida no Teorema 3.2 é tal que

$$-g(0) \leq 1.$$

De fato, o Teorema 3.2 nos diz que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \xi_{nt}(0) = tg(0).$$

Como $-\xi_t(x) \leq N_x(0, t]$, então

$$-g(0) = -\frac{1}{t} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \xi_{nt}(0) \leq \frac{1}{t} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_0(0, nt]}{n},$$

e utilizando a Proposição 2.5 concluímos que $-g(0) \leq 1$.

3.4 Limite hidrodinâmico para o processo de alturas

Na seção anterior provamos o limite hidrodinâmico tendo como configuração inicial o perfil minimal. Nesta seção, vamos provar o limite

hidrodinâmico para uma escolha mais geral de funções alturas como configurações iniciais. Para isso, faremos antes algumas considerações.

Seja h_0 uma função altura. Consideraremos, sem perda de generalidade, que $h_0(0) = 0$, e que

$$h_0(u) = \sup_{v \in \mathbb{Z}} \sigma_0^v(u),$$

onde $\sigma_0^v(u) := h_0(v) + k((u-v) \wedge 0) = h_0(v) + \xi_0(u-v)$, isto é, σ_0^v é o perfil minimal trasladado, como se pode observar na Figura 3.10.

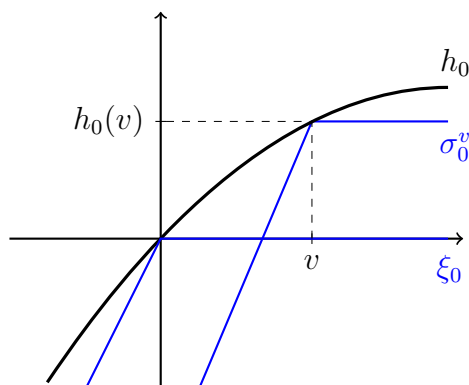


Figura 3.10: Função altura determinada pelo perfil minimal trasladado.

Note que a função h_0 e a família $\{\sigma_0^v; v \in \mathbb{Z}\}$ lêem os mesmos relógios de Poisson. Assim, pela Proposição 3.2, para todo $u \in \mathbb{Z}$ e $t \geq 0$, vale que

$$h_t(u) = \sup_{v \in \mathbb{Z}} \sigma_t^v(u), \quad \text{q.c.}$$

Como σ_0^v é o perfil minimal trasladado, temos que ainda vale o limite do Teorema 3.2, mas a função g também será trasladada.

Agora vamos tomar uma sequência de funções alturas $\{h_0^n\}_{n=1}^\infty$, definidas no mesmo espaço de probabilidade, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que h_0^n é definida da mesma maneira que h_0 . Então,

$$h_0^n(u) = \sup_{v \in \mathbb{Z}} \sigma_0^{nv}(u) = \sup_{v \in \mathbb{Z}} \{h_0^n(v) + \xi_0^{nv}(u-v)\},$$

pela Proposição 3.2, temos que

$$h_{nt}^n(u) = \sup_{v \in \mathbb{Z}} \{h_0^n(v) + \xi_{nt}^{nv}(u - v)\}, \quad \text{q.c.} \quad (3.16)$$

Para provar o limite hidrodinâmico para processos de altura assumiremos que a sequência $\{h_0^n\}_{n=1}^\infty$ está associada a um perfil macroscópico no seguinte sentido: existe uma função $\psi_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left| n^{-1} h_0^n(\lfloor nx \rfloor) - \psi_0(x) \right| \geq \varepsilon \right] = 0.$$

Além disso, assumiremos que a função ψ_0 satisfaz a propriedade de Lipschitz

$$0 \leq \psi_0(x + r) - \psi_0(x) \leq kr \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \text{ e } r > 0. \quad (3.17)$$

Vamos definir também a função $\psi : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi(x, 0) := \psi_0(x) \quad \text{e} \quad \psi(x, t) := \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \psi_0(y) + tg \left(\frac{x - y}{t} \right) \right\}, \quad \text{se } t > 0, \quad (3.18)$$

onde g é a função definida no Teorema 3.2.

Vamos à prova do limite hidrodinâmico para processos de altura.

Teorema 3.3. *Assumindo que, para cada $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left| n^{-1} h_0^n(\lfloor nx \rfloor) - \psi_0(x) \right| \geq \varepsilon \right] = 0, \quad (3.19)$$

temos que, para cada $t, \varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left| n^{-1} h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor) - \psi(x, t) \right| \geq \varepsilon \right] = 0. \quad (3.20)$$

Demonstração. Fixados $x, t, \varepsilon \in \mathbb{R}$ com $t, \varepsilon > 0$ queremos mostrar o limite (3.20). Para isso, provaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[n^{-1} h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor) - \psi(x, t) \geq \varepsilon \right] = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[n^{-1} h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor) - \psi(x, t) \leq -\varepsilon \right] = 0$. Vamos começar mos-

trando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[n^{-1}h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor) \leq \psi(x, t) - \varepsilon] = 0. \quad (3.21)$$

Para isso considere a seguinte afirmação.

Afirmação 3.1. *Dados $x, t \in \mathbb{R}$ com $t > 0$ temos que o supremo em*

$$\psi(x, t) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \psi_0(y) + tg\left(\frac{x-y}{t}\right) \right\}$$

é atingido para algum $y \in \mathbb{R}$ tal que $|x - y| \leq t$.

Para facilitar a leitura, a demonstração desta e de outras afirmações serão postergadas. Elas se encontram após a demonstração deste teorema. Pela Afirmação 3.1, existe $y \in \mathbb{R}$ com $|x - y| \leq t$ tal que o supremo em (3.18) é atingido, isto é

$$\psi(x, t) = \psi_0(y) + tg\left(\frac{x-y}{t}\right). \quad (3.22)$$

Como supremo em (3.16) também é atingido, temos que

$$\begin{aligned} n^{-1}h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor) &= n^{-1}h_0^n(\lfloor ny \rfloor) + n^{-1}\xi_{nt}^{\lfloor ny \rfloor}(\lfloor nx \rfloor - \lfloor ny \rfloor) \\ &= n^{-1}h_0^n(\lfloor ny \rfloor) + n^{-1}\xi_{nt}(\lfloor nx \rfloor - \lfloor ny \rfloor). \end{aligned} \quad (3.23)$$

A última igualdade se deve ao fato de $\xi_{nt}^{\lfloor ny \rfloor}$ e ξ_{nt} possuírem a mesma função de distribuição. Substituindo (3.23) e (3.22) em (3.21) temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[n^{-1}h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor) \leq \psi(x, t) - \varepsilon\right] &\leq \mathbb{P}\left[n^{-1}h_0^n(\lfloor ny \rfloor) \leq \psi_0(y) - \varepsilon/2\right] \\ &\quad + \mathbb{P}\left[n^{-1}\xi_{nt}(\lfloor nx \rfloor - \lfloor ny \rfloor) \leq tg\left(\frac{x-y}{t}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\right]. \end{aligned}$$

Tomando $n \rightarrow \infty$, pelo limite (3.19) e pelo Teorema 3.2 obtemos o limite (3.21).

Agora, iremos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[n^{-1} h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor) \geq \psi(x, t) + \varepsilon \right] = 0. \quad (3.24)$$

Para isso, faremos algumas considerações.

Afirmção 3.2. *Considere B um intervalo fechado em \mathbb{Z} e u um inteiro em B . Suponha que para $v \in \partial B$, $\xi_t^v(u - v) = \xi_0^v(u - v)$. Então*

$$h_t(u) = \max_{v \in B} \{h_0(v) + \xi_t^v(u - v)\}.$$

Afirmção 3.3. *Dados $x, t \in \mathbb{R}$ com $t > 0$, seja $A = [x - t - 1, x + t + 1]$ e o conjunto $Y_n = \max_{v \in nA} \{h_0^n(v) + \xi_{nt}^v(\lfloor nx \rfloor - v)\}$. Então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{P}[h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor) \neq Y_n] \leq e^{g(v)},$$

com $g(v) = \exp \left\{ -(\lfloor nx \rfloor - v) \cdot I \left(\frac{nt}{\lfloor nx \rfloor - v} \right) \right\} < 0$ para alguma $v \in nA = [n(x - t - 1), n(x + t + 1)]$.

Considere o intervalo A e o conjunto Y_n definidos na Afirmção 3.3. Note que se o supremo em $h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor)$ for atingido para algum $v \in nA$ então $Y_n = h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor)$. Vamos construir uma cobertura finita para o intervalo A .

Utilizando o $\varepsilon > 0$ já fixado anteriormente, seja $\delta > 0$ tal que $\delta k < \varepsilon/2$. Defina $D_j = [y_j, z_j]$ com $y_j < z_j \leq y_j + \delta$ de forma que $A \subseteq \cup_{j=1}^M D_j$, para algum inteiro positivo M . Dessa forma, podemos reescrever Y_n como

$$Y_n = \max_{1 \leq j \leq M} \max_{v \in nD_j} \{h_0^n(v) + \xi_{nt}^v(\lfloor nx \rfloor - v)\}. \quad (3.25)$$

Afirmção 3.4. *Sejam $u, v, w \in \mathbb{Z}$ tal que $v \leq w$, então*

$$\xi_t^w(u - w) \leq \xi_t^v(u - v), \quad q.c.$$

Note que, como h_0^n é função crescente, seu máximo no intervalo compacto nD_j é atingido em $v = \lfloor nz_j \rfloor$. Além disso, pela Afirmção 3.4, no

intervalo nD_j , $\xi_{nt}^v(\lfloor nx \rfloor - v)$ atinge seu máximo em $v = \lfloor ny_j \rfloor$. Substituindo na equação (3.25),

$$Y_n \leq \max_{1 \leq j \leq M} \{h_0^n(\lfloor nz_j \rfloor) + \xi_{nt}^v(\lfloor nx \rfloor - \lfloor ny_j \rfloor)\}. \quad (3.26)$$

Por fim, utilizando (3.17) e a definição de ψ , notamos que

$$\begin{aligned} \psi_0(z_j) + tg\left(\frac{x - y_j}{t}\right) &\leq k(z_j - y_j) + \psi_0(y_j) + tg\left(\frac{x - y_j}{t}\right) \\ &\leq k\delta + \psi(x, t) < \varepsilon/2 + \psi(x, t). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Agora poderemos mostrar o limite (3.24). Note que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[n^{-1}h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor) \geq \psi(x, t) + \varepsilon] &\leq \mathbb{P}[h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor) \neq Y_n] \\ &\quad + \mathbb{P}[n^{-1}Y_n \geq \psi(x, t) + \varepsilon]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Analisaremos cada parcela do lado direito da desigualdade (3.28) separadamente. Na primeira parcela, pela Afirmação 3.3, temos que

$$\mathbb{P}[h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor) \neq Y_n] \leq e^{g(v)} \longrightarrow 0, \quad (3.29)$$

quando $n \rightarrow \infty$, já que $g(v) < 0$. Na segunda parcela do lado direito da desigualdade (3.28), utilizando (3.26) e (3.27) temos que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[n^{-1}Y_n \geq \psi(x, t) + \varepsilon] \\ &\leq \mathbb{P}\left[\frac{1}{n} \max_{1 \leq j \leq M} \{h_0^n(\lfloor nz_j \rfloor) + \xi_{nt}^v(\lfloor nx \rfloor - \lfloor ny_j \rfloor)\} \geq \psi_0(z_j) + tg\left(\frac{x - y_j}{t}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ &\leq \sum_{j=1}^M \mathbb{P}\left[n^{-1}h_0^n(\lfloor nz_j \rfloor) + n^{-1}\xi_{nt}^v(\lfloor nx \rfloor - \lfloor ny_j \rfloor) \geq \psi_0(z_j) + tg\left(\frac{x - y_j}{t}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ &\leq \sum_{j=1}^M \mathbb{P}\left[n^{-1}h_0^n(\lfloor nz_j \rfloor) \geq \psi_0(z_j) + \frac{\varepsilon}{4}\right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^M \mathbb{P}\left[n^{-1}\xi_{nt}^v(\lfloor nx \rfloor - \lfloor ny_j \rfloor) \geq tg\left(\frac{x - y_j}{t}\right) + \frac{\varepsilon}{4}\right], \end{aligned}$$

sendo que as duas últimas somas convergem para 0 quando n tende ao infinito, uma por hipótese, e a outra pelo Teorema 3.2. Dessa forma,

$$\mathbb{P}[n^{-1}Y_n \geq \psi(x, t) + \varepsilon] \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

Logo, com (3.29) e (3.30) obtemos o limite (3.24) e assim o limite hidrodinâmico para funções altura está provado. \square

Agora demonstraremos as afirmações feitas ao longo do Teorema 3.3.

Demonstração da Afirmação 3.1. Para $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$ fixados, considere o conjunto $A = \{y \in \mathbb{R}; |x - y| \leq t\}$. Queremos mostrar que o supremo em

$$\psi(x, t) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \psi_0(y) + tg \left(\frac{x - y}{t} \right) \right\},$$

não é atingido em A^c , ou seja, para cada $\tilde{y} \in A^c$ existe $\bar{y} \in A$ tal que

$$\psi_0(\bar{y}) + tg \left(\frac{x - \bar{y}}{t} \right) \geq \psi_0(\tilde{y}) + tg \left(\frac{x - \tilde{y}}{t} \right). \quad (3.31)$$

Neste caso, se o supremo for atingido, será para algum $y \in A$. Como as funções g e ψ_0 são contínuas, então $\psi_0(y) + tg \left(\frac{x - y}{t} \right)$ é contínua. Além disso, A é compacto, logo $\psi_0(y) + tg \left(\frac{x - y}{t} \right)$ admite máximo em A . Logo, a Afirmação 3.1 estará provada.

Falta mostrar que o supremo não é atingido em A^c . Tome $\tilde{y} \in A^c$, logo $|x - \tilde{y}| > t$. Seja $\beta = \frac{t}{|x - \tilde{y}|}$, desta forma $0 < \beta < 1$. Tome $\bar{y} = x + \beta(\tilde{y} - x) = x \pm t$, portanto $t = |x - \bar{y}|$, então $\bar{y} \in A$. Vamos mostrar que para estes \tilde{y} e \bar{y} , a desigualdade (3.31) é satisfeita.

Se $\tilde{y} > x$, como $x - \bar{y} = \beta(x - \tilde{y})$, temos que

$$\begin{aligned} tg\left(\frac{x - \bar{y}}{t}\right) &= tg\left(\frac{\beta(x - \tilde{y})}{t}\right) = t\beta g\left(\frac{x - \tilde{y}}{t}\right) = t\beta k\left(\frac{x - \tilde{y}}{t} \wedge 0\right) \\ &= t\beta k\left(\frac{x - \tilde{y}}{t}\right) + tg\left(\frac{x - \tilde{y}}{t}\right) - tg\left(\frac{x - \tilde{y}}{t}\right) \\ &= tg\left(\frac{x - \tilde{y}}{t}\right) + (1 - \beta)(k(\tilde{y} - x)). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Além disso, como $x < \tilde{y}$ e $\beta < 1$, então

$$x(\beta - 1) > \tilde{y}(\beta - 1) \Rightarrow -\bar{y} = x\beta - x - \tilde{y}\beta > -\tilde{y} \Rightarrow \bar{y} < \tilde{y}.$$

Neste caso, como ψ_0 satisfaz a propriedade (3.17)

$$\psi_0(\tilde{y}) - \psi_0(\bar{y}) \leq k(\tilde{y} - \bar{y}) = k(\tilde{y} - x - \beta(\tilde{y} - x)).$$

Logo,

$$\psi_0(\bar{y}) \geq \psi_0(\tilde{y}) - k(\tilde{y} - x) + k\beta(\tilde{y} - x) = \psi_0(\tilde{y}) - k(1 - \beta)(\tilde{y} - x). \quad (3.33)$$

Em vista das desigualdades (3.32) e (3.33), obtemos

$$\begin{aligned} \psi_0(\bar{y}) + tg\left(\frac{x - \bar{y}}{t}\right) &\geq \psi_0(\tilde{y}) - k(1 - \beta)(\tilde{y} - x) + tg\left(\frac{x - \tilde{y}}{t}\right) \\ &\quad + (1 - \beta)(k(\tilde{y} - x)) = \psi_0(\tilde{y}) + tg\left(\frac{x - \tilde{y}}{t}\right). \end{aligned}$$

Se $\tilde{y} < x$ temos que

$$tg\left(\frac{x - \bar{y}}{t}\right) = t\beta g\left(\frac{x - \tilde{y}}{t}\right) = t\beta k\left(\frac{x - \tilde{y}}{t} \wedge 0\right) = 0.$$

Além disso, como $\tilde{y} < \bar{y}$ e ψ_0 satisfaz (3.17), então

$$0 \leq \psi_0(\bar{y}) - \psi_0(\tilde{y}).$$

Com isso, obtemos a desigualdade (3.31). □

Demonstração da Afirmação 3.2. Dados $B \subseteq \mathbb{Z}$ e $u \in B$, considere v e v' os elementos do bordo de B , denotado por ∂B , tais que $v' > u$ e $v < u$. Seja $w \in B^c$ tal que $w > v' > u$. Utilizando o fato de h_0 ser função Lipschitz, temos que

$$\begin{aligned} h_0(w) + \xi_t^w(u - w) &\leq h_0(w) + \xi_0^w(u - w) = h_0(w) + k((u - w) \wedge 0) \\ &= h_0(w) + k(u - w) \leq h_0(v') + k(w - v') + k(u - w) \\ &= h_0(v') + k(u - v') = h_0(v') + k((u - v') \wedge 0) \\ &= h_0(v') + \xi_0^{v'}(u - v'). \end{aligned}$$

Se $w \in B^c$ é tal que $w < v < u$, temos que

$$\begin{aligned} h_0(w) + \xi_t^w(u - w) &\leq h_0(w) + \xi_0^w(u - w) = h_0(w) \\ &\leq h_0(v) = h_0(v) + \xi_0^v(u - v). \end{aligned}$$

Dessa forma, se $w \in B^c$ e $v \in \partial B$, então

$$h_0(w) + \xi_t^w(u - w) \leq h_0(v) + \xi_0^v(u - v) = h_0(v) + \xi_t^v(u - v). \quad (3.34)$$

Por definição, $h_t(u) = \sup_{v \in \mathbb{Z}} \{h_0(v) + \xi_t^v(u - v)\}$. Utilizando a desigualdade (3.34), concluímos que

$$h_t(u) = \sup_{v \in B} \{h_0(v) + \xi_t^v(u - v)\}.$$

Como B é compacto e $h_0(v) + \xi_t^v(u - v)$ é contínua, o supremo é atingido para algum ponto em B . Logo,

$$h_t(u) = \max_{v \in B} \{h_0(v) + \xi_t^v(u - v)\}.$$

□

Demonstração da Afirmação 3.3. Seja $x, t \in \mathbb{R}$ com $t > 0$. Dizer que $h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor) \neq Y_n$ é equivalente a dizer que o valor de máximo que determina $h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor)$ não é assumido em nA . Neste caso, pela contrapositiva da Afirmação 3.2, $\xi_{nt}^v(\lfloor nx \rfloor - v) < \xi_0^v(\lfloor nx \rfloor - v)$ para algum $v \in \partial(nA)$.

Note que obtemos a desigualdade, pois ξ^v não cresce no tempo.

Dessa forma, basta mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor) \neq Y_n] = \mathbb{P}[\xi_{nt}^v(\lfloor nx \rfloor - v) < \xi_0^v(\lfloor nx \rfloor - v)] \leq e^{g(v)},$$

onde $g(v) < 0$ para algum $v \in \partial(nA)$. Utilizaremos a Proposição 3.4. Para isto precisamos verificar que $|\lfloor nx \rfloor - v| > nt$. Seja $v \in \partial(nA)$ tal que $v = n(x + t + 1)$. Então,

$$|v - \lfloor nx \rfloor| = |nx + nt + n - \lfloor nx \rfloor| > |\lfloor nx \rfloor + nt + n - \lfloor nx \rfloor| > nt.$$

Já que ξ^v é função altura tendo como configuração inicial o perfil minimal e $|\lfloor nx \rfloor - v| > nt$, segue pela Proposição 3.4 que, para $v = n(x + t + 1) \in \partial(nA)$,

$$\mathbb{P}[\xi_{nt}^v(\lfloor nx \rfloor - v) < \xi_0^v(\lfloor nx \rfloor - v)] \leq \exp \left\{ -(\lfloor nx \rfloor - v) \cdot I \left(\frac{nt}{\lfloor nx \rfloor - v} \right) \right\} = e^{g(v)}.$$

Além disso, como $g'(v) > 0$ sempre que $|\lfloor nx \rfloor - v| > nt$, então g é função crescente nos intervalos onde $|\lfloor nx \rfloor - v| > nt$. Como $g(\lfloor nx \rfloor - nt) = 0$,

$$g(v) \geq g(\lfloor nx \rfloor + nt + n) > g(\lfloor nx \rfloor - nt) = 0.$$

□

Demonstração da Afirmação 3.4. Dados $u, v, w \in \mathbb{Z}$ com $v \leq w$, temos que $u - w \leq u - v$. Assim,

$$\xi_0^w(u - w) = k((u - w) \wedge 0) \leq k((u - v) \wedge 0) = \xi_0^v(u - v).$$

Pela Proposição 3.1, concluímos que para todo $t \geq 0$,

$$\xi_t^w(u - w) \leq \xi_t^v(u - v), \quad \text{q.c.}$$

□

3.5 O limite hidrodinâmico como solução de uma equação diferencial parcial

Nos teoremas a seguir, faremos algumas considerações sobre a função ψ . Provaremos que ψ é solução de uma equação diferencial parcial e apresentaremos algumas propriedades desta equação. Antes, vamos definir uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(\rho) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{\rho x - g(x)\}, \quad (3.35)$$

onde g é a função definida no Teorema 3.2, e f é chamada *transformada de Legendre* de g .

Afirmção 3.5. *Seja $\rho \in [0, k]$. Então, o ínfimo na função f definida em (3.35) é atingido para algum $x \in [-1, 1]$.*

Demonstração. Vamos proceder de maneira análoga à que fizemos na Afirmção 3.1, mostrando que para cada $\rho \in [0, k]$, o ínfimo em (3.35) não será atingido em $[-1, 1]^c$. Feito isso, como a função de x , $\rho x - g(x)$ é contínua e $[-1, 1]$ é compacto, o ínfimo será atingido para algum $x \in [-1, 1]$.

Fixado $\rho \in [0, k]$, mostraremos que para cada $\tilde{x} \in [-1, 1]^c$ existe $x \in [-1, 1]$ tal que

$$\rho x - g(x) < \rho \tilde{x} - g(\tilde{x}).$$

Se $\tilde{x} \in (1, \infty)$, tome $x = 1$, pois

$$\rho \tilde{x} - g(\tilde{x}) = \rho \tilde{x} > \rho = \rho \cdot 1 - g(1).$$

Se $\tilde{x} \in (-\infty, -1)$, tome $x = -1$, pois

$$\rho \tilde{x} - g(\tilde{x}) = (\rho - k)\tilde{x} > (\rho - k)(-1) = \rho \cdot (-1) - k(-1 \wedge 0) = \rho \cdot (-1) - g(-1).$$

Portanto, se $\rho \in [0, k]$, o ínfimo em (3.35) é atingido para algum $x \in [-1, 1]$. \square

Agora provaremos uma propriedade da função ψ que será utilizada na demonstração do próximo teorema.

Proposição 3.5. *Considere a função altura ψ definida em (3.18). Para $0 < s < t$ e $x \in \mathbb{R}$, temos que*

$$\psi(x, t) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \psi(y, s) + (t - s)g\left(\frac{x - y}{t - s}\right) \right\}. \quad (3.36)$$

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $0 < s < t$. Primeiramente, note que como g é côncava, para todo $y, z \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in (0, 1)$, vale que

$$g\left(\alpha\left(\frac{y - z}{s}\right) + (1 - \alpha)\left(\frac{x - y}{t - s}\right)\right) \geq \alpha g\left(\frac{y - z}{s}\right) + (1 - \alpha)g\left(\frac{x - y}{t - s}\right).$$

Como $t > s$, podemos tomar $\alpha = s/t < 1$. Assim,

$$g\left(\frac{y - z}{t} + \frac{x - y}{t}\right) \geq \frac{s}{t}g\left(\frac{y - z}{s}\right) + \frac{(t - s)}{t}g\left(\frac{x - y}{t - s}\right).$$

Logo,

$$tg\left(\frac{x - z}{t}\right) \geq sg\left(\frac{y - z}{s}\right) + (t - s)g\left(\frac{x - y}{t - s}\right). \quad (3.37)$$

Substituindo a definição de $\psi(y, s)$ no lado direito da igualdade (3.36), e utilizando (3.37), obtemos

$$\begin{aligned} & \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \psi(y, s) + (t - s)g\left(\frac{x - y}{t - s}\right) \right\} \\ &= \sup_{z, y \in \mathbb{R}} \left\{ \psi_0(z) + sg\left(\frac{y - z}{s}\right) + (t - s)g\left(\frac{x - y}{t - s}\right) \right\} \\ &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}} \left\{ \psi_0(z) + tg\left(\frac{x - z}{t}\right) \right\} = \psi(x, t). \end{aligned}$$

Para mostrar a desigualdade contrária, considere $c < \psi(x, t)$ tal que

$$\psi_0(y) + tg\left(\frac{x - y}{t}\right) \geq c.$$

Tome $z = \frac{s}{t}x + \left(1 - \frac{s}{t}\right)y$. Logo,

$$\frac{t}{s}(z - y) - z = x - y - z \Rightarrow (z - y)\left(\frac{t}{s} - 1\right) = x - z \Rightarrow \frac{z - y}{s} = \frac{x - z}{t - s}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \psi(y, s) + (t - s)g\left(\frac{x - y}{t - s}\right) \right\} \geq \psi(z, s) + (t - s)g\left(\frac{x - z}{t - s}\right) \\ & = \sup_{w \in \mathbb{R}} \left\{ \psi_0(w) + sg\left(\frac{z - w}{s}\right) \right\} + (t - s)g\left(\frac{x - z}{t - s}\right) \\ & \geq \psi_0(y) + sg\left(\frac{z - y}{s}\right) + (t - s)g\left(\frac{z - y}{s}\right) = \psi_0(y) + tg\left(\frac{z - y}{s}\right) \geq c. \end{aligned}$$

Como $c < \psi(x, t)$ é arbitrário, temos que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \psi(y, s) + (t - s)g\left(\frac{x - y}{t - s}\right) \right\} \geq \psi(x, t),$$

e o resultado segue. □

Vamos enunciar o Teorema de Rademacher, que será utilizado na demonstração do Teorema 3.5 que segue. Para uma prova detalhada deste teorema, sugerimos [3].

Teorema 3.4 (Rademacher). *Seja f uma função Lipschitz em \mathbb{R}^n . Então f é diferenciável à Lebesgue em quase todo ponto.*

Para demonstrar o próximo teorema contaremos com o auxílio do método probabilístico. Esse método, de maneira sucinta, consiste em provar a existência de um certo objeto matemático A através da construção de um espaço de probabilidade, onde o evento [objeto A acontece] tem probabilidade positiva. Para mais resultados sobre o método probabilístico veja [6].

Teorema 3.5. *A função altura ψ definida em (3.18), onde g é a função definida no Teorema 3.2, é Lipschitz em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, portanto, diferenciável à Lebesgue em quase todo ponto. Além disso, para todo ponto*

(x, t) de diferenciabilidade em $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, temos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \in [0, k] \quad e \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = -f \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) \right),$$

com f a função definida em (3.35).

Demonstração. Mostraremos que ψ é função Lipschitz utilizando o método probabilístico. Primeiramente observe que, dados $x, y \in \mathbb{R}$ e $t > s > 0$, pela desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} |\psi(x, t) - \psi(y, s)| &\leq |\psi(x, t) - n^{-1}h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor)| + |n^{-1}h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor) \\ &\quad - n^{-1}h_{nt}^n(\lfloor ny \rfloor)| + |n^{-1}h_{nt}^n(\lfloor ny \rfloor) - n^{-1}h_{ns}^n(\lfloor ny \rfloor)| \\ &\quad + |n^{-1}h_{ns}^n(\lfloor ny \rfloor) - \psi(y, s)|. \end{aligned}$$

Utilizando a Observação 3.1 no segundo termo do lado direito da desigualdade acima, e (3.8) no terceiro termo, obtemos

$$\begin{aligned} |\psi(x, t) - \psi(y, s)| &\leq |\psi(x, t) - n^{-1}h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor)| + kn^{-1}|\lfloor nx \rfloor - \lfloor ny \rfloor| \\ &\quad + n^{-1}N_{\lfloor ny \rfloor}(s, t) + |n^{-1}h_{ns}^n(\lfloor ny \rfloor) - \psi(y, s)|. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Observando cada parcela do lado direito da desigualdade (3.38) temos que a primeira e a última parcela convergem, em probabilidade, para 0, pelo Teorema 3.3. Além disso, a Proposição 2.5 nos diz que

$$\frac{1}{n}N_{\lfloor ny \rfloor}(s, t) \longrightarrow t - s, \quad \text{q.c.},$$

portanto também converge em probabilidade. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$\mathbb{P} \left[\left| \psi(x, t) - \frac{h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor)}{n} \right| + \left| \frac{N_{\lfloor ny \rfloor}(s, t)}{n} - (t - s) \right| + \left| \frac{h_{ns}^n(\lfloor ny \rfloor)}{n} - \psi(y, s) \right| < \varepsilon \right] > \frac{1}{2}.$$

Logo, existe $\omega \in \Omega$ tal que

$$\begin{aligned} \left| \psi(x, t) - \frac{h_{nt}^n(\lfloor nx \rfloor)}{n} \right| + \left| \frac{N_{\lfloor ny \rfloor}(s, t)}{n} - (t - s) \right| \\ + \left| \frac{h_{ns}^n(\lfloor ny \rfloor)}{n} - \psi(y, s) \right| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para este ω , substituindo (3.39) em (3.38), obtemos

$$|\psi(x, t) - \psi(y, s)| < \varepsilon + (t - s) + kn^{-1} |\lfloor nx \rfloor - \lfloor ny \rfloor|. \quad (3.40)$$

Por fim, note que para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$. Daí,

$$\begin{aligned} kn^{-1} |\lfloor nx \rfloor - \lfloor ny \rfloor| &< kn^{-1} |nx - ny + 1| \leq kn^{-1} |nx - ny| + kn^{-1} \\ &= k|x - y| + kn^{-1} \longrightarrow k|x - y| \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Voltando em (3.40), como ε é arbitrário, para n suficientemente grande concluímos que

$$|\psi(x, t) - \psi(y, s)| < (t - s) + k|x - y|.$$

Logo, ψ é uma função Lipschitz.

Pelo Teorema 3.4, concluímos que a função ψ é diferenciável à Lebesgue em quase todo ponto. Para concluir o teorema falta mostrar que dado um ponto (x_0, t_0) tal que ψ é diferenciável, vale que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \in [0, k] \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x_0, t_0) = -f\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, t_0)\right).$$

Primeiramente, já sabemos da Afirmação 3.1 que fixados $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $t_0 > 0$, o supremo em ψ é atingido. Então,

$$\psi(x_0, t_0) = \psi_0(y) + t_0 g\left(\frac{x_0 - y}{t_0}\right).$$

Logo,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, t_0) = t_0 g'\left(\frac{x_0 - y}{t_0}\right) \frac{1}{t_0} = g'\left(\frac{x_0 - y}{t_0}\right).$$

Como a função g é não decrescente e além disso sua “inclinação” máxima é k , então

$$0 \leq \frac{\partial \psi}{\partial x} \leq k.$$

Provaremos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x_0, t_0) = -f\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, t_0)\right).$$

Pela Afirmação 3.5, o ínfimo na função f é atingido em $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, t_0)$. Então, para algum $z \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, t_0)\right) = z \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, t_0) - g(z). \quad (3.41)$$

Para este z e algum $\delta > 0$, utilizando a Proposição 3.5 temos que

$$\begin{aligned} \psi(x_0 + \delta z, t_0 + \delta) &= \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \psi_0(y) + (t_0 + \delta)g\left(\frac{x_0 + \delta z - y}{t_0 + \delta}\right) \right\} \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \psi(y, t_0) + \delta g\left(\frac{x_0 + \delta z - y}{\delta}\right) \right\} \geq \psi(x_0, t_0) + \delta g(z). \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\psi(x_0 + \delta z, t_0 + \delta) - \psi(x_0, t_0)}{\delta} \geq g(z).$$

Tomando o limite quando $\delta \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\psi(x_0 + \delta z, t_0 + \delta) - \psi(x_0, t_0)}{\delta} \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} g(z) = g(z).$$

Note que o lado esquerdo da desigualdade acima é a derivada direcional de ψ no ponto (x_0, t_0) , na direção do vetor $v = (z, 1)$. Logo

$$\frac{\partial \psi}{\partial v}(x_0, t_0) \geq g(z).$$

Pela linearidade da derivada, obtemos

$$z \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, t_0) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(x_0, t_0) - g(z) \geq 0.$$

Substituindo (3.41) na equação acima,

$$f\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(x_0, t_0)\right) + \frac{\partial\psi}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0.$$

Para mostrar a desigualdade contrária, primeiro considere $y \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(x_0, t_0) = \psi_0(y) + t_0 g\left(\frac{x_0 - y}{t_0}\right)$. Dado $\delta > 0$, seja

$$z = x_0 - \frac{\delta(x_0 - y)}{t_0} \Rightarrow z - y = (t_0 - \delta)\frac{x_0 - y}{t_0} \Rightarrow \frac{z - y}{t_0 - \delta} = \frac{x_0 - y}{t_0}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \psi(x_0, t_0) - \psi(z, t_0 - \delta) &= \psi_0(y) + t_0 g\left(\frac{x_0 - y}{t_0}\right) \\ &\quad - \sup_{w \in \mathbb{R}} \left\{ \psi_0(w) + (t_0 - \delta)g\left(\frac{z - w}{t_0 - \delta}\right) \right\} \\ &\leq \psi_0(y) + t_0 g\left(\frac{x_0 - y}{t_0}\right) - \psi_0(y) - (t_0 - \delta)g\left(\frac{z - y}{t_0 - \delta}\right) \\ &= \delta g\left(\frac{z - y}{t_0 - \delta}\right) = \delta g\left(\frac{x_0 - y}{t_0}\right). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Utilizando a linearidade da derivada, e tomando $v = \left(\frac{x_0 - y}{t_0}, 1\right)$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x_0 - y}{t_0} \frac{\partial\psi}{\partial x}(x_0, t_0) + \frac{\partial\psi}{\partial t}(x_0, t_0) &= \frac{\partial\psi}{\partial v}(x_0, t_0) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{-\psi\left(x_0 - \delta \frac{x_0 - y}{t_0}, t_0 - \delta\right) + \psi(x_0, t_0)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\psi(x_0, y_0) - \psi(z, t_0 - \delta)}{\delta} \\ &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} g\left(\frac{z - y}{t_0 - \delta}\right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} g\left(\frac{x_0 - y}{t_0}\right) = g\left(\frac{x_0 - y}{t_0}\right), \end{aligned} \tag{3.43}$$

onde a desigualdade acima decorreu de (3.42). Por outro lado,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(x_0, t_0)\right) + \frac{\partial\psi}{\partial t}(x_0, t_0) &= \inf_{w \in \mathbb{R}} \left\{ w \frac{\partial\psi}{\partial x}(x_0, t_0) - g(w) \right\} + \frac{\partial\psi}{\partial t}(x_0, t_0) \\ &\leq \frac{x_0 - y}{t_0} \frac{\partial\psi}{\partial x}(x_0, t_0) - g\left(\frac{x_0 - y}{t_0}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial t}(x_0, t_0) \\ &\leq g\left(\frac{x_0 - y}{t_0}\right) - g\left(\frac{x_0 - y}{t_0}\right) = 0 \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem de (3.43). Assim, concluímos o teorema. \square

Teorema 3.6. *A função velocidade f definida em (3.35) é côncava e contínua em $[0, k]$. Além disso, $f \equiv -\infty$ fora de $[0, k]$, é nula em $\{0, k\}$ e $0 < f \leq 1$ para todo $\rho \in (0, k)$.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que $f \equiv -\infty$ em $[0, k]^c$. Seja $\rho \in [0, k]^c$. Se $\rho \in (-\infty, 0)$, como $f(\rho) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{\rho x - g(x)\}$, tomando $x_n \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que

$$f(\rho) \leq x_n \rho - g(x_n) \rightarrow -\infty.$$

Note que $g(x_n) = 0$ para n suficientemente grande. Se $\rho \in (k, \infty)$, tomando $x_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$f(\rho) \leq x_n \rho - kx_n = (\rho - k)x_n \rightarrow -\infty.$$

Antes de calcular o valor de f em $\rho \in \{0, k\}$ mostraremos que $f \geq 0$ em $[0, k]$. Fixado $\rho \in [0, k]$, se $x \geq 0$ temos que $g(x) \leq 0 \leq x\rho$ e se $x < 0$, $g(x) \leq kx \leq x\rho$. Logo, se $\rho \in [0, k]$, então $g(x) \leq x\rho$. Dessa forma, se $\rho \in [0, k]$, então $f(\rho) \geq 0$. Para $\rho = 0$,

$$0 \leq f(0) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{-g(x)\} \leq -g(1) = 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

Para $\rho = k$,

$$0 \leq f(k) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{kx - g(x)\} \leq -k - g(-1) = 0 \Rightarrow f(k) = 0.$$

Para mostrar a concavidade de f em $[0, k]$ considere $\rho, \tilde{\rho} \in [0, k]$ e $\alpha \in [0, 1]$. Queremos concluir que

$$f(\alpha\rho + (1 - \alpha)\tilde{\rho}) \geq \alpha f(\rho) + (1 - \alpha)f(\tilde{\rho}). \quad (3.44)$$

Note que $\alpha\rho + (1 - \alpha)\tilde{\rho} \in [0, k]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Portanto, utilizando a Afirmação 3.5, para algum $x \in [-1, 1]$ o ínfimo na função f é atingido, ou seja,

$$f(\alpha\rho + (1 - \alpha)\tilde{\rho}) = \alpha\rho x + (1 - \alpha)\tilde{\rho}x - g(x).$$

Desenvolvendo o lado direito da desigualdade (3.44), obtemos

$$\begin{aligned} \alpha f(\rho) + (1 - \alpha)f(\tilde{\rho}) &\leq \alpha(\rho x - g(x)) + (1 - \alpha)(\tilde{\rho}x - g(x)) \\ &= \alpha\rho x + (1 - \alpha)\tilde{\rho}x + \alpha g(x) - g(x) - \alpha g(x) \\ &= f(\alpha\rho + (1 - \alpha)\tilde{\rho}). \end{aligned}$$

Logo, f é côncava. Agora provaremos a continuidade. Para isto tome uma sequência $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq [0, k]$ com $\rho_j \rightarrow \rho \in [0, k]$. Utilizando a Afirmação 3.5, seja $x \in [-1, 1]$ tal que $f(\rho) = \rho x - g(x)$. Assim,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(\rho_j) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} (\rho_j x - g(x)) = \rho x - g(x) = f(\rho). \quad (3.45)$$

Falta mostrar a desigualdade contrária. Se $\rho = 0$ ou $\rho = k$ temos que $f(\rho) = 0$. Substituindo na desigualdade (3.45), concluimos que $0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} f(\rho_j) \leq 0$. Logo, $\lim_{j \rightarrow \infty} f(\rho_j) = 0 = f(\rho)$ e o resultado segue. Agora suponha $\rho \in (0, k)$. Para cada $\rho_j \in (\rho_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tome $\lambda_j \in \{0, k\}$ de modo que a reta $r_j(t)$ com $t \in [0, 1]$, ligando ρ a λ_j , passe por ρ_j . Isto é, para algum $\alpha_j \in [0, 1]$,

$$r_j(\alpha_j) = \alpha_j\rho + (1 - \alpha_j)\lambda_j = \rho_j.$$

Daí $\rho_j - \lambda_j = \alpha_j(\rho - \lambda_j)$. Então,

$$|\alpha_j(\rho - \lambda_j)| \leq |\rho - \lambda_j| \leq |\rho - \rho_j| + |\rho_j - \lambda_j| = |\rho - \rho_j| + |\alpha_j(\rho - \lambda_j)|.$$

Tomando $j \rightarrow \infty$, como $\rho_j \rightarrow \rho$ concluimos que $\alpha_j \rightarrow 1$. Além disso, como f é côncava e $f(\lambda_j) = 0$, temos que

$$f(\rho_j) = f(\alpha_j \rho + (1 - \alpha_j) \lambda_j) \geq \alpha_j f(\rho) + (1 - \alpha_j) f(\lambda_j) = \alpha_j f(\rho).$$

Tomando $j \rightarrow \infty$, obtemos a desigualdade desejada:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(\rho_j) \geq f(\rho).$$

Portanto a continuidade de f está provada. Para mostrar que $f \leq 1$ note que, dado $\rho \in (0, k)$,

$$f(\rho) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{x\rho - g(x)\} \leq -g(0).$$

Utilizando a Observação 3.2, temos que

$$f(\rho) \leq -g(0) \leq 1.$$

Por fim, provaremos que $f > 0$. Observe que é suficiente provar que existe $\rho_0 \in (0, k)$ tal que $f(\rho_0) > 0$. Pois como $f(0) = f(k) = 0$ e f é côncava, se $f(\rho_0) > 0$ com $\rho_0 \in (0, k)$, então $f(\rho) > 0$ para todo $\rho \in (0, k)$. Dito isso, tome $\rho_0 = 1/2$. Então,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{x}{2} - g(x) \right\} \geq 0.$$

Suponha, por absurdo, que $f(1/2) = 0$. Sabemos pela Proposição 3.5 que existe $x_0 \in [-1, 1]$ tal que $f(1/2) = x_0/2 - g(x_0)$. Logo,

$$\frac{x_0}{2} = g(x_0).$$

Além disso, $x_0 \neq 0$ pois $g(0) \neq 0$. Se $x_0 > 0$, temos que $g(x_0) > 0$, o que é uma contradição, pois $g \leq 0$. Se $x_0 < 0$, então

$$g(x_0) = \frac{1}{2}x_0 > kx_0 = k(x_0 \wedge 0) = \xi_0(x_0),$$

contradição pois $g \leq \xi_0$. Portanto $f(1/2) > 0$ e assim $f > 0$.

□

Capítulo 4

Prova do limite hidrodinâmico para o k -TASEP

No capítulo anterior provamos o limite hidrodinâmico para funções altura e através dele obteremos o limite hidrodinâmico para o processo de k -exclusão.

Assuma que temos uma sequência de configurações iniciais determinísticas ou aleatórias $\{\eta_0^n\}_{n=1}^\infty$, definidas no mesmo espaço de probabilidade. Considere $\{\mathcal{J}_x\}$ os relógios de Poisson independentes entre si e independentes de $\{\eta_0^n\}$. Construimos neste espaço o processo de k -exclusão η_t^n como descrito no Capítulo 2.

Para provar o limite hidrodinâmico precisaremos admitir a existência de um perfil inicial para a densidade macroscópica das partículas. Explicaremos isso com mais detalhes no que segue. Seja $0 \leq \rho_0 \leq k$ uma função mensurável em \mathbb{R} . Assumiremos que para todo $a, b, \varepsilon \in \mathbb{R}$ tais que $-\infty < a < b < \infty$ e $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left| n^{-1} \sum_{y=[na]+1}^{[nb]} \eta_0^n(y) - \int_a^b \rho_0(x) dx \right| > \varepsilon \right] = 0. \quad (4.1)$$

Agora defina a função ψ_0 tal que para todo $-\infty < a < b < \infty$,

$$\psi_0(0) = 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b \rho_0(x) dx = \psi_0(b) - \psi_0(a).$$

Sejam $\psi(x, t), g(x)$ as funções definidas em (3.18) e (3.2) respectivamente. Como a função ψ é Lipschitz e diferenciável à Lebesgue em quase todo ponto, defina

$$\rho(x, t) := \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t). \quad (4.2)$$

Definição 4.1. Dizemos que ρ é solução fraca equação de Burgers

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f \circ \rho) = 0 \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x) \end{cases}, \quad (4.3)$$

onde f é a transformada de Legendre de g , se para toda função $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ e de suporte compacto, tivermos

$$\int_{\mathbb{R}} H(x) \rho(x, t) dx - \int_{\mathbb{R}} H(x) \rho_0(x) dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(\rho) \frac{\partial H}{\partial x}(x) dx ds = 0. \quad (4.4)$$

Intuitivamente, a equação (4.4) é obtida através de (4.3) utilizando integração por partes. A próxima proposição mostra a relação entre o limite hidrodinâmico do processo de altura e do processo de k -exclusão.

Proposição 4.1. A função $\rho(x, t)$ definida em (4.2) é solução fraca de (4.3), com f a função fluxo definida em (3.35).

Demonstração. Considere uma função $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que H é de classe C^∞ e tem suporte compacto. Verificaremos que $\rho(x, t)$ é solução fraca de (4.3) através da definição, utilizando integração por partes e o Teorema 3.5.

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} H(x)\rho(x,t)dx - \int_{\mathbb{R}} H(x)\rho(x,0)dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(\rho) \frac{\partial H}{\partial x}(x) dx ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} H(x) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) dx - \int_{\mathbb{R}} H(x) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,0) dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,s) \right) \frac{\partial H}{\partial x}(x) dx ds \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial H}{\partial x}(x) \psi(x,t) dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial H}{\partial x}(x) \psi(x,0) dx + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \frac{\partial \psi}{\partial s}(x,s) \frac{\partial H}{\partial x}(x) ds dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(-\psi(x,t) + \psi(x,0) + \int_0^t \frac{\partial \psi}{\partial s}(x,s) dt \right) \frac{\partial H}{\partial x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(-\psi(x,t) + \psi(x,0) + \psi(x,t) - \psi(x,0) \right) \frac{\partial H}{\partial x} dx = 0.
\end{aligned}$$

Logo, a função $\rho(x,t)$ é solução fraca de (4.3). □

No próximo teorema, provaremos o limite hidrodinâmico para o processo de exclusão totalmente assimétrico (TASEP).

Teorema 4.1. *Assumindo (4.1), temos que para todo a, b e ε , tal que $-\infty < a < b < \infty$ e $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left| n^{-1} \sum_{y=[na]+1}^{[nb]} \eta_{nt}^n(y) - \int_a^b \rho(x,t) dx \right| > \varepsilon \right] = 0,$$

onde $\rho(x,t)$ é a função definida em (4.2).

Demonstração. Primeiramente note que como $\eta_t(y) = h_t(y) - h_t(y-1)$, fixados a e b tais que $-\infty < a < b < \infty$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{y=[na]+1}^{[nb]} \eta_{nt}^n(y) &= h_{nt}^n([na]+1) - h_{nt}^n([na]) + h_{nt}^n([na]+2) \\
&\quad - h_{nt}^n([na]+1) + \cdots + h_{nt}^n([nb]-1) - h_{nt}^n([nb]-2) \\
&\quad + h_{nt}^n([nb]) - h_{nt}^n([nb]-1) \\
&= h_{nt}^n([nb]) - h_{nt}^n([na]).
\end{aligned}$$

Além disso, pela definição de ρ , e como ψ é Lipschitz,

$$\int_a^b \rho(x, t) dx = \psi(b, t) - \psi(a, t).$$

Obtemos pelo Teorema 3.3 que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ temos que,

$$|n^{-1}h_{nt}^n(\lfloor nb \rfloor) - \psi(b, t)| \leq \varepsilon/2 \text{ e } |n^{-1}h_{nt}^n(\lfloor na \rfloor) - \psi(a, t)| \leq \varepsilon/2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \left| n^{-1} \sum_{y=\lfloor na \rfloor+1}^{\lfloor nb \rfloor} \eta_{nt}^n(y) - \int_a^b \rho(x, t) dx \right| \\ &= |n^{-1}h_{nt}^n(\lfloor nb \rfloor) - n^{-1}h_{nt}^n(\lfloor na \rfloor) - \psi(b, t) + \psi(a, t)| \\ &\leq |n^{-1}h_{nt}^n(\lfloor nb \rfloor) - \psi(b, t)| + |n^{-1}h_{nt}^n(\lfloor na \rfloor) - \psi(a, t)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, concluímos o Teorema. □

Para o caso em que $k = 1$ conseguimos obter as funções f e g explicitamente. Para mais informações ver [7, Capítulo 9, Página 146].

Capítulo 5

Perspectivas futuras

Como motivação para estudos futuros, vamos considerar processos de exclusão totalmente assimétricos com um elo lento. Até então tínhamos que cada elo possuía um processo de Poisson com taxa $r = 1$. Podemos tomar um processo de k -exclusão onde $k = 1$ e com um elo onde o processo de Poisson tenha taxa $r < 1$, os demais permanecem com taxa 1.

Ainda temos diversas questões em aberto sobre sistemas de partículas, como por exemplo, o que ocorre com o processo de exclusão assimétrico, com um único elo lento, quando $r \rightarrow 1$. Qual seria o valor limite dessa taxa para que não ocorra "engarrafamento" de partículas nesse elo lento.

Outra direção: Para dimensões maiores (\mathbb{Z}^d todos os resultados apresentados nesta dissertação seriam válidos. Porém seria necessário estudar percolação de última passagem.

Bibliografia

- [1] Barry, R. J., *Probabilidade: um curso em nível intermediário*, Projeto Euclides, (2013).
- [2] Durrett, R., *Probability: Theory and Examples*, Thomson-Brooks/cole, (2005).
- [3] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, AMS, Graduate Studies in Mathematics, (1998).
- [4] Grosskinsky, S., *Interacting Particle Systems*, Warwick, 2009.
- [5] Kingman, J. F. C., *The Ergodic Theory of Subadditive Processes*, J. Roy. Stat. Soc. B 30, 499-510 (1968).
- [6] Spencer, J. H., Alon, N., *The Probabilistic Method*, INC, 2000.
- [7] Seppalainen, T., *Translation Invariant Exclusion Processes*, Department of Mathematics - University of Wisconsin, 2008.
- [8] Seppalainen, T., *Existence of Hydrodynamics for the Totally Asymmetric Simple k -Exclusion Process*, Annals of Probability, 1999, vol. 27, N° 1, 361-415.

Universidade Federal da Bahia-UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em
Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus de Ondina, Salvador-BA
CEP: 40170 -110
www.pgmat.ufba.br