Substitutiva - MATB31 2026.1
Intro. Análise Combinatória
Prof.: Tertuliano Franco
Data: 30/06/2026

Instruções: Interpretação do enunciado faz parte da avaliação. Cada questão vale 2,0 pontos. Escreva seus argumentos com clareza.

Nome:____

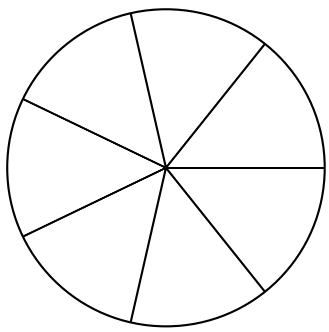
(1) Uma fábrica produz sacos com 20 balas, de sabores morango, menta, mel e chocolate. Quantos tipos diferentes de sacos podem ser produzidos?

Solução: A quantidade de tipos diferentes de sacos que podem ser produzidos é a quantidade de soluções em inteiros não negativos de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \;=\; 20,$$

que é igual a $\dfrac{23!}{20!3!} = 1771$.

(2) De quantas maneiras podemos pintar as faces de uma roleta de 7 compartimentos se temos 9 cores disponíveis, e



(a) não podemos repetir cores?

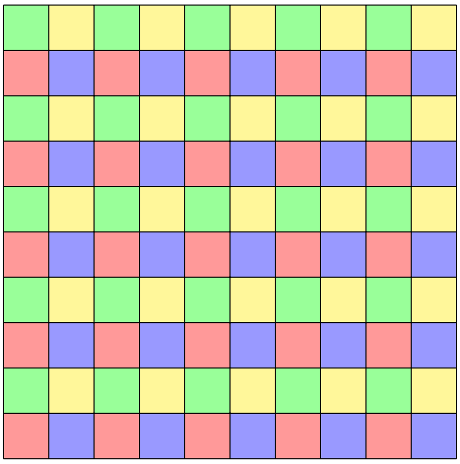
Resposta: $\dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{7} = 25920$

(b) podemos repetir cores?

Resposta: $\dfrac{9}{1} + \dfrac{9^7 - 9}{7} = 683289.$

(3) Em um tabuleiro de xadrez infinito, são colocados $4n + 1$ reis. No xadrez, o rei ataca suas oito casas adjacentes, e cada peça ocupa uma casa. Mostre que haverá $n + 1$ reis que não se atacam.

Solução: Vamos pintar o tabuleiro infinito no seguinte padrão.



Como são quatro cores e $4n+1$ reis, pelo Princípio das Casas dos Pombos, haverá pelo menos $n+1$ reis em casas de mesma cor, os quais não se atacam.

(4) Usando o Teorema das Colunas, calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Solução: $k^2 = 2 \times \dfrac{k(k-1)}{2} + k = 2\dbinom{k}{2} + \dbinom{k}{1}$. Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; 2\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} \;=\; 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}.$$

(5) Quantas são as sequências finitas de dígitos 1 ou 2 cuja soma é igual a n? Por exemplo, para $n=3$, temos as sequências $(1,1,1)$, $(1,2)$ e $(2,1)$.

Solução: Seja a_n a resposta do problema. Temos que $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$. Separando nos casos de acordo com a primeira entrada da sequência, que pode ser 1 ou 2, encontramos $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, que é Fibonaci. Resolvendo por equação característica ou função geradora, obtemos

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$