Prova II - MATB31 2026.1
Intro. Análise Combinatória
Prof.: Tertuliano Franco
Data: 18/07/2026

Instruções: Interpretação do enunciado faz parte da avaliação. Cada questão vale 2,0 pontos. Escreva seus argumentos com clareza.

Nome:____

(1) Seja S em conjunto de números inteiros com 41 elementos. Mostre que S possui um subconjunto R de 11 elementos tal que a soma ou a diferença de quaisquer dois elementos de R é divisível por 7.

Solução: Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} A_0 &= \{k \in \mathbb{Z} : k \text{ deixa resto } 0 \text{ na divisão por } 7\} \\ A_{1,6} &= \{k \in \mathbb{Z} : k \text{ deixa resto } 1 \text{ ou } 6 \text{ na divisão por } 7\} \\ A_{2,5} &= \{k \in \mathbb{Z} : k \text{ deixa resto } 2 \text{ ou } 5 \text{ na divisão por } 7\} \\ A_{3,4} &= \{k \in \mathbb{Z} : k \text{ deixa resto } 3 \text{ ou } 4 \text{ na divisão por } 7\} \end{aligned}$$

Note que todo inteiro pertence a um dos conjuntos acima. Como são 4 conjuntos e S possui 41 elementos, pelo Princípio das Casas dos Pombos, algum conjunto acima conterá pelo menos 11 elementos de S. Chame esse subconjunto de R.

Se $R \subset A_0$, tanto soma quanto diferença de quaisquer dois elementos será divisível por 7.

Se $R \subset A_{1,7}$, dados $x, y \in R$, temos quatro possibilidades:

(a) Se $x = 7q_1 + 1$ e $x = 7q_2 + 1$, temos que $x - y = 7(q_1 - q_2)$ é divisível por 7. Se $x = 7q_1 + 1$ e $x = 7q_2 + 6$, temos que $x + y = 7(q_1 + q_2 + 1)$ é divisível por 7. Se $x = 7q_1 + 6$ e $x = 7q_2 + 1$, temos que $x + y = 7(q_1 + q_2 + 1)$ é divisível por 7. Se $x = 7q_1 + 6$ e $x = 7q_2 + 6$, temos que $x - y = 7(q_1 - q_2)$ é divisível por 7.

O argumento para $A_{2,5}$ e $A_{3,4}$ é análogo.

(2) Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k$.

Solução: Temos que

$$k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k = 4!\binom{k}{4}.$$

Pelo Teorema das Colunas,

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k = 4!\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{4} = 4!\binom{n+1}{5}.$$

(3) Encontre a função geradora associada ao seguinte problema: de quantas maneiras podemos distribuir n bolas indistinguíveis em n urnas indistinguíveis de maneira que, para todo $k \in \mathbb{N}$, a quantidade **de urnas** com k bolas seja par?

Solução:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x^{1+1} + x^{1+1+1+1} + \cdots\right) \\ &\quad \times \left(1 + x^{2+2} + x^{2+2+2+2} + \cdots\right) \\ &\quad \times \left(1 + x^{3+3} + x^{3+3+3+3} + \cdots\right) \cdots \\ &= \left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^4}\right)\left(\frac{1}{1-x^6}\right)\cdots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k}} \end{aligned}$$

(4) Um curso de Combinatória tem 12 estudantes, que formam pares para estudar, e que são eventualmente desfeitos para formar novos pares. Prove que sempre existem dois estudantes tal que há outros cincos estudantes que fizeram dupla com ambos ou com nenhum (cada um destes cinco estudantes fez dupla com ambos ou com nenhum do dois).

Solução: Suponha que não existam tais estudantes. Ou seja, para quaisquer dois estudantes, há no máximo quatro outros estudantes tais cada um destes quatro ou fez dupla com os dois ou fez dupla com nenhum dos dois.

Seja

$$\mathcal{R} = \Big\{ \big(e_k, \{e_i, e_j\}\big) : e_k \text{ fez dupla com ambos } e_i, e_j \text{ ou com nenhum dos dois} \Big\}.$$

Por um lado, $|\mathcal{R}| \leq \binom{12}{2} \cdot 4 = 264$. Por outro lado, $|\mathcal{R}| \geq \left[\binom{6}{2} + \binom{5}{2}\right] \cdot 12 = 300$, contradição.

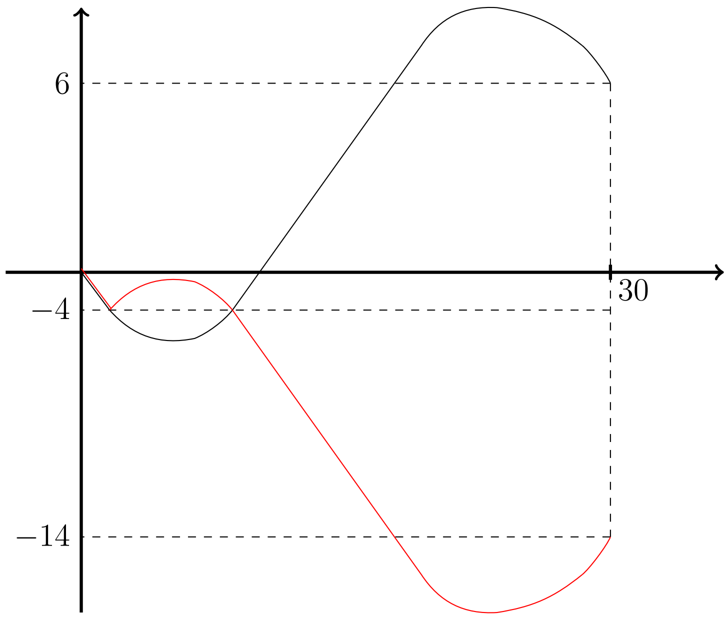
(5) De quantas maneiras podemos fazer um caminho poligonal que sai de $(0,0)$, sobe ou desce uma unidade a cada passo, toca em algum momento na reta $y = -4$, e ao final termina no ponto $(30,6)$?

Solução: Pela reflexão da figura a seguir, precisamos contar os caminhos que saem de $(0,0)$ e chegam em $(30,-14)$. Resolvendo

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = -14 \end{cases}$$

temos $x = 8$ e $y = 22$. Logo, temos como resposta

$$\frac{30!}{8!22!} = 5852925.$$



(6) **(Extra 2pt)** Denotando por f a função geradora da questão (3), quanto vale $f^{(2027)}(0)$?

Solução: Lembre que a função geradora associada a sequência $q(n)$ é definida por

$$f(x) \;=\; q(0) + q(1)x + q(2)x^2 + q(3)x^3 + \cdots$$

Por indução,

$$f^{(n)}(0) \;=\; n! \times q(n).$$

Para a sequência $q(n)$ da questão (3), afirmamos que $q(n) = 0$ para todo n ímpar. De fato, como há um número par de urnas com k bolas para todo $k \geq 0$, o número total de bolas deve ser par, pois a soma de números pares é um número par. Daí,

$$f^{(2027)}(0) \;=\; 2027! \times q(2027) \;=\; 0.$$