



Prova II - MATB31 2026.1  
Intro. Análise Combinatória  
Prof.: Tertuliano Franco  
Data: 18/07/2026



**Instruções:** Interpretação do enunciado faz parte da avaliação. Cada questão vale 2,0 pontos. Escreva seus argumentos com clareza.

**Nome:** \_\_\_\_\_

- (1) Seja  $S$  em conjunto de números inteiros com 41 elementos. Mostre que  $S$  possui um subconjunto  $R$  de 11 elementos tal que a soma ou a diferença de quaisquer dois elementos de  $R$  é divisível por 7.

(2) Calcule  $\sum_{k=1}^n k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k$ .

**Resposta:**  $4! \binom{n+1}{5}$ .

- (3) Encontre a função geradora associada ao seguinte problema: de quantas maneiras podemos distribuir  $n$  bolas indistinguíveis em  $n$  urnas indistinguíveis de maneira que, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , a quantidade **de urnas** com  $k$  bolas seja par?
- (4) Um curso de Combinatória tem 12 estudantes, que formam pares para estudar, e que são eventualmente desfeitos para formar novos pares. Prove que sempre existem dois estudantes tal que há outros cinco estudantes que fizeram dupla com ambos ou com nenhum (cada um destes cinco estudantes fez dupla com ambos ou com nenhum do dois).

**Dica:** faça por contradição e use contagem dupla.

- (5) De quantas maneiras podemos fazer um caminho poligonal que sai de  $(0, 0)$ , sobe ou desce uma unidade a cada passo, toca em algum momento na reta  $y = -4$ , e ao final termina no ponto  $(30, 6)$ ?

**Resposta:** 5852925.

- (6) **(Extra 2pt)** Denotando por  $f$  a função geradora da questão (3), quanto vale  $f^{(2027)}(0)$ ?