



Prova I - MATB31 2026.1
Intro. Análise Combinatória
Prof.: Tertuliano Franco
Data: 05/05/2026



Gabarito Resumido

- (1) Quantas são as soluções da inequação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 10$ em inteiros x_k tais que $x_k \geq -k$ para $k = 1, \dots, 6$?

Solução: Temos que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 10$$

é o mesmo que

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 2) + (x_3 + 3) + (x_4 + 4) + (x_5 + 5) + (x_6 + 6) \leq 31.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y_i = x_i + i$, temos que

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \leq 31,$$

sendo $y_i \geq 0$. Logo,

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = t, \quad 0 \leq t \leq 31$$

que é o mesmo que

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + (31 - t) = 31$$

com $0 \leq t \leq 31$. Fazendo a mudança de variáveis $(31 - t) = y_7$, temos

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 31$$

com $y_i \geq 0$. Pela bijeção com palitinhos e sinais de mais, temos como resposta

$$\frac{37!}{6!31!} = 2324784$$

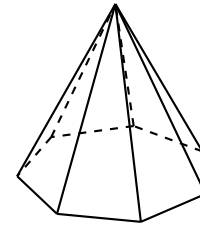
- (2) Quantos são os anagramas com 20 letras A , 70 letras B e 29 letras C tais que letras A não podem ser consecutivas e as letras B devem ser todas consecutivas?

Solução: Como os B devem ser consecutivos, podemos considerá-los como um único objeto (uma única letra). Assim, temos $20 + 1 + 29 = 50$ letras.

Primeiro vamos escolher as posições dos A 's que não devem ser consecutivos. Pelo Primeiro Lema de Kaplanski, temos $\binom{50-20+1}{20} = \binom{31}{20}$ possibilidades. Em seguida, precisamos escolher as posições das outras letras, que são 30 letras com repetição de 29. Temos então como total

$$\binom{31}{20} \frac{30!}{1!29!} = \binom{31}{20} 30 = 2540169450.$$

- (3) De quantas maneiras podemos pintar as faces de uma pirâmide regular de base heptagonal se temos 10 cores disponíveis, e



- (a) não podemos repetir cores?

Solução: Há 7 movimentos. Logo, temos

$$\frac{10!}{\frac{2!}{7}} = 259200$$

pinturas diferentes.

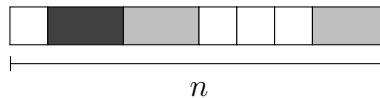
- (b) podemos repetir cores?

Solução: As classes de equivalência tem tamanho 1 ou 7. Logo, temos

$$\frac{10^2}{1} + \frac{10^8 - 10^2}{7} = 14285800$$

pinturas diferentes.

- (4) Uma faixa horizontal $1 \times n$ será completamente coberta por azulejos, que podem ter dois formatos retangulares, 1×1 ou 1×2 . Cada azulejo 1×1 é branco, e cada azulejo 1×2 pode ser cinza claro ou cinza escuro, veja a figura abaixo. Encontre o número de maneiras de cobrir a faixa horizontal.



Solução: A recorrência correspondente é

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, & n \geq 2, \\ a_1 = 1, \\ a_2 = 3. \end{cases}$$

que pode ser escrita como

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, & n \geq 2, \\ a_0 = 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

cuja equação característica é $x^2 - x - 2 = 0$. As raízes deste equação são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$, ambas de multiplicidade igual a um. Logo, $a_n = A(-1)^n + B2^n$.

Usando as condições iniciais, obtemos

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A + 2B = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $B = 2/3$ e $A = 1/3$, logo

$$a_n = \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}.$$

- (5) Numa corrida da hipotética Fórmula-T há 16 carros, sendo 4 equipes (ou seja, cada equipe tem 4 carros). A largada é feita no formato de um quadrado 4×4 . Não é permitido que nenhuma equipe tenha todos os seus 4 carros alinhados numa mesma fila. De quantos modos a largada pode ser feita? Considere os carros idênticos.

Solução: Seja A o conjunto das largadas na quais a primeira equipe tem seus carros numa mesma fila, Seja B o conjunto das largadas na quais a primeira equipe tem seus carros numa mesma fila, seja C o conjunto das largadas na quais a primeira equipe tem seus carros numa mesma fila e seja D o conjunto das largadas na quais a primeira equipe tem seus carros numa mesma fila. Pelo Princípio de Inclusão-Exclusão, temos que

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \\ &\quad + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\ &\quad - |A \cap B \cap C \cap D|. \end{aligned}$$

Usando simetria, temos que

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| &= 4|A| - 6|A \cap B| + 4|A \cap B \cap C| - |A \cap B \cap C \cap D| \\ &= 4 \cdot 4 \cdot \frac{12!}{4!4!4!} - 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{8!}{4!4!} + 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 - 4! \\ &= 549432. \end{aligned}$$

Tomando o complementar, obtemos como resposta

$$\frac{16!}{4!4!4!4!} - 549432 = 62513568.$$

- (6) (Extra) Prove, por um argumento combinatório, que

$$\binom{\binom{n}{3}}{2} = 20 \binom{n}{6} + 15 \binom{n}{5} + 6 \binom{n}{4}.$$

Solução: Vamos contar a quantidades de pares não-ordenados de comissões de 3 pessoas escolhidas numa sala com n pessoas. Uma resposta é o lado esquerdo da identidade. Por outro lado, temos três casos distintos. Ou as duas comissões possuem 6 pessoas diferentes, ou possuem 5 pessoas diferentes ou possuem 4 pessoas diferentes.

1º caso: As comissões são $\{a, b, c\}$ e $\{c, d, e\}$, sendo que letras distintas representam pessoas distintas. Nesse caso, temos

$$\binom{n}{6} \binom{6}{3} \frac{1}{2} = 20 \binom{n}{6}$$

possibilidades.

2º caso: As comissões são $\{a, b, c\}$ e $\{a, d, e\}$, sendo que letras distintas representam pessoas distintas. Nesse caso, temos

$$\binom{n}{5} 5 \binom{4}{2} \frac{1}{2} = 15 \binom{n}{5}$$

possibilidades.

3º caso: As comissões são $\{a, b, c\}$ e $\{a, b, e\}$, sendo que letras distintas representam pessoas distintas. Nesse caso, temos

$$\binom{n}{4} \binom{4}{2} = 6 \binom{n}{4}$$

possibilidades.