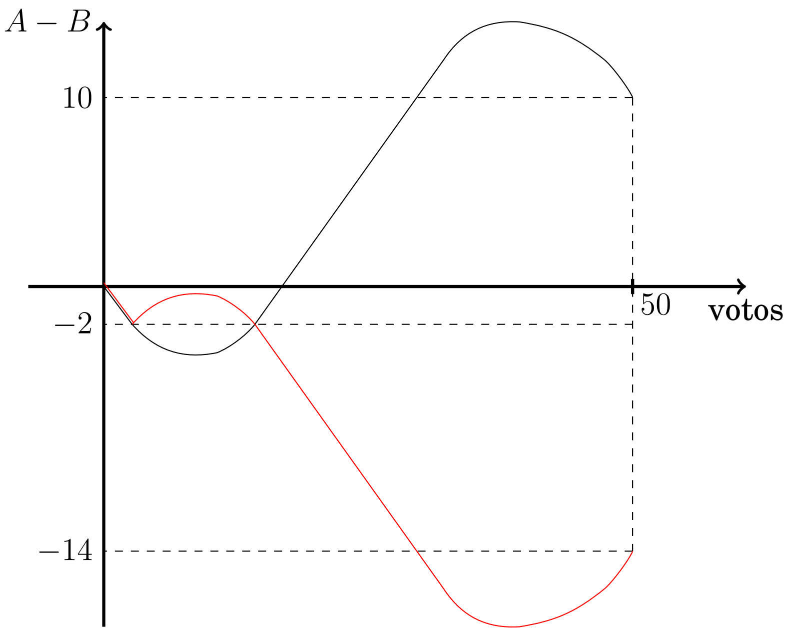
Prova II - MATB31 2025.1
Intro. Análise Combinatória
Prof.: Tertuliano Franco
Data: 15/07/2025

Instruções: Interpretação do enunciado faz parte da avaliação. Cada questão vale 2,0 pontos. Escreva seus argumentos com clareza.

Nome:____

(1) Numa eleição, o candidato A teve 30 votos e o candidato B teve 20 votos. Qual a probabilidade de que, em algum momento da apuração, o candidato B tenha estado 2 votos (ou mais) à frente?

Solução: Fazendo um reflexão da trajetória em preto em torno da primeira vez que a apuração chega em $y = -2$, obtemos a trajetória ilustrada em vermelho mostrada na figura abaixo.



A quantidade de de trajetórias vermelhas é igual a quantidade de permutação de S subidas e D descidas, onde

$$\begin{cases} S + D = 50 \\ S - D = -14 \end{cases}$$

Logo, $S = 18$ e $D = 32$. Assim, a quantidade total de apurações é $\frac{50}{20!30!}$. Logo, a probabilidade pedida é

$$\frac{\frac{50}{18!32!}}{\frac{50}{20!30!}} = \frac{20!30!}{18!32!} = \frac{20 \cdot 19}{31 \cdot 32} \sim 0{,}38306451612903225\,.$$

(2) O Bahia vence uma partida num dia chuvoso com probabilidade $0{,}7$ e vence num dia sem chuva com probabilidade $0{,}6$. A probabilidade de chover é de $0{,}3$. Dado que o Bahia ganhou um jogo, qual a probabilidade de que tenha chovido nesse dia?

Solução: Sejam os eventos $C = [\,\text{chove}\,]$ e $B = [\,\text{Bahia ganha}\,]$. Queremos calcular $\mathbb{P}(C|B)$. Pela Fórmula de Bayes,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C|B) &= \frac{\mathbb{P}(C\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|C)\cdot\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(B|C)\cdot\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(B|C^{\complement})\cdot\mathbb{P}(C^{\complement})}\\ &= \frac{0,7\cdot 0,3}{0,7\cdot 0,3+0,6\cdot(1-0,3)} = \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

(3) Usando o Teorema das Colunas no Triângulo de Pascal, calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3-3k^2+2k$.

Solução: Resolvendo $\sum_{k=1}^{n} k^3-3k^2+2k = A\binom{k}{3}+B\binom{k}{2}+C\binom{k}{1}+D\binom{k}{0}$, obtemos $A=6$, $B=C=D=0$. Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3-3k^2+2k = 6\sum_{0}^{n}\binom{k}{3} = 6\binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}\,.$$

(4) Um mapa tem n cidades, e cada estrada liga duas cidades distintas. Suponha que de cada cidade partam d estradas. Quantas estradas tem este mapa?

Solução: Seja $\mathcal{M}$ o conjunto dos pares (c,e) onde c é uma cidade, e é uma estrada, e a estrada e está ligada à cidade c. Por contagem dupla,

$$\sum_{(c,e)\in\mathcal{M}} 1 = \sum_{c}\sum_{e\colon (c,e)\in\mathcal{M}} 1 = \sum_{e}\sum_{c\colon (c,e)\in\mathcal{M}} 1\,.$$

Seja T o total de cidades. Como cada cidade está ligada a d estrada,

$$\sum_{c}\sum_{e\colon (c,e)\in\mathcal{M}} 1 = n\cdot d\,.$$

Por outro lado, como cada estrada liga duas cidades,

$$\sum_{e}\sum_{c\colon (c,e)\in\mathcal{M}} 1 = T\cdot 2\,.$$

Logo, $T=\frac{nd}{2}$.

(5) Um total de n cadeiras são colocadas em torno de uma mesa redonda. Sobre a mesa estão os nomes de n convidados. Após os convidados se sentarem, verificou-se que nenhum deles estava sentado em frente ao seu próprio nome. Prove que a mesa pode ser rotacionada de tal maneira que pelos menos dois convidados fiquem sentados em frente aos seus próprios nomes simultaneamente.

Dica: chame de *satisfeita* uma pessoa que esteja em frente ao próprio nome e considere as rotações da mesa.

Solução: As rotações são as casas de pombos, e as pessoas sentadas em frente ao próprio nome são os pombos. São n rotações, mas como inicialmente ninguém está em frente ao próprio nome, esta casa de pombo está vazia (a rotação de zero graus). Logo, restam $n-1$ casas para distribuir os pombos. Note que ao fazer as n rotações, cada pessoa vê o próprio nome exatamente uma vez. Ou seja, são n pombos para colocar em $n-1$ casas. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, há pelo menos uma casa com pelo menos dois pombos, ou seja, há uma rotação tal que pelo menos duas pessoas estão em frente aos seus respectivos nomes.

(6) **(Extra)** Encontre a função geradora associada ao seguinte problema: de quantas maneiras podemos distribuir n bolas indistinguíveis em (infinitas) urnas indistinguíveis de maneira que, para todo $k \in \mathbb{N}$, haja no máximo k urnas com k bolas? Enuncie o análogo deste problema em termos de partições de números naturais.

Solução: Lembrando que o termo escolhido no k-ésimo par de parênteses controla a quantidade de urnas com k bolas, deduzimos que a função geradora é dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6+x^9)(1+x^4+x^8+x^{12}+x^{16})\cdots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} x^{jk} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-(x^k)^{k+1}}{1-x^k} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-x^{k^2+k}}{1-x^k}. \end{aligned}$$

O análogo do problema em termos de partições de números naturais é: *de quantas maneiras podemos escrever um natural n como soma de naturais de maneira que cada natural k apareça no máximo k vezes na soma? Por exemplo, $20 = 4+4+4+4+2+2$ é permitido, mas $20 = 4+4+4+4+4$ não.*