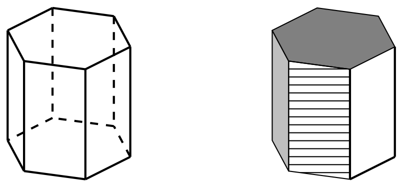
Prova I - MATB31 2025.1
Intro. Análise Combinatória
Prof.: Tertuliano Franco
Data: 27/05/2025

Instruções: Interpretação do enunciado faz parte da avaliação. Cada questão vale 2,0 pontos.

Nome:____

(1) De quantas maneiras podemos pintar as faces de prisma reto de base hexagonal se temos 10 cores disponíveis, e **não** podemos repetir cores? Veja a figura abaixo para uma ilustração. **Resposta:** $\binom{10}{8}\frac{8!}{6\times 2} = 151200$.



(2) De quantas maneiras podemos pintar os compartimentos de uma roleta de 6 compartimentos se temos 4 cores disponíveis e podemos repetir cores? **Resposta:** $\frac{4}{1} + \frac{4^2-4}{2} + \frac{4^3-4}{3} + \frac{4^6-\left(4+(4^2-4)+(4^3-4)\right)}{6} = 700$.

(3) Resolva a recorrência

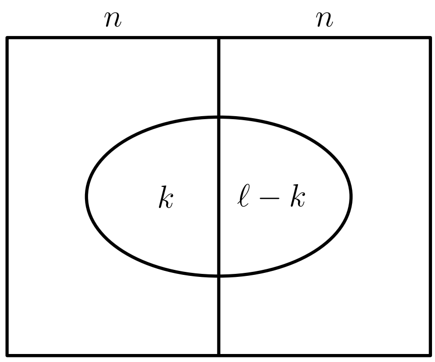
$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}, \quad \forall\, n \geq 2 \\ a_0 = 2 \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

Resposta: A equação característica é $x^2 - 3x + 2 = 0$, cujas raízes de multiplicidade 1 são 1 e 2. Logo, $a_n = A1^n + B2^n$. Usando as condições iniciais, obtemos $a_n = 1 + 2^n$.

(4) Prove, por um argumento combinatório, que

$$\binom{2n}{\ell} = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k}\binom{n}{\ell - k}.$$

Resposta: conte quantas são as comissões com ℓ pessoas escolhidas de um grupo de $2n$ pessoas, onde n torcem para o Bahia e n torcem para o Vitória.

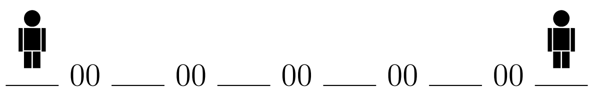


(5) Numa corrida da hipotética Fórmula-C há 16 carros, sendo 4 equipes (ou seja, cada equipe tem 4 carros). A largada é feita no formato de um quadrado 4×4. Não é permitido que nenhuma equipe tenha todos os seus 4 carros alinhados numa mesma fila. De quantos modos a largada pode ser feita? Considere os carros distintos. **Resposta:**

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C \cup D| = &+ \binom{4}{1} \times 4 \times 4! \times 12!\\ &- \binom{4}{2} \times 4 \times 3 \times (4!)^2 \times 8!\\ &+ \binom{4}{3} \times 4 \times 3 \times 2 \times (4!)^3 \times 4!\\ &- \binom{4}{4} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (4!)^4\\ = &\ 82264463720\end{aligned}$$

Logo, temos como resposta $16! - 82264463720 = 20840525424280$.

(6) **(Extra)** $k + 2$ pessoas devem se sentar numa mesma fila de $n + 2$ cadeiras no cinema, onde n e k têm mesma paridade. De quantas maneiras isso pode ser feito se deve haver uma pessoa em cada cadeira nos extremos da fila, e o número de cadeiras vazias entre quaisquer duas pessoas consecutivas deve ser par? Considere as pessoas distintas.



Resposta: Temos $n - k$ cadeiras vazias, que representamos por $n - k$ zeros, portanto $\frac{n-k}{2}$ duplas de zeros. Daí, temos $\frac{n-k}{2} - 1$ espaços nos quais as k pessoas podem sentar (estamos desconsiderando as pessoas que estão sentadas nas pontas). Logo, podemos escolher os espaços a serem ocupados de $\binom{\frac{n-k}{2}-1}{k}$ maneiras. Considerando as $(k + 2)!$ possíveis permutações das pessoas, temos como resposta final

$$(k+2)!\binom{\frac{n-k}{2} - 1}{k}.$$