Prova 1 - **Gabarito Resumido**
Probabilidade - MAT562 2024.2
Prof. Tertuliano Franco
Data: 26/11/2024

1) **(2.5 pt)**

(a) Sejam $X_1 \sim$ Poisson(λ_1) e $X_2 \sim$ Poisson(λ_2) independentes. Mostre que

$$\mathbb{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \binom{n}{k}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^k\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^{n-k}.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n-k)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)}\\
&= \frac{\mathbb{P}(X_1 = k)\cdot\mathbb{P}(X_2 = n-k)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)}\\
&= \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k \cdot e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n/n!}\\
&= \binom{n}{k}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^k\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^{n-k}.
\end{aligned}$$

(b) Sejam $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$ e $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ independentes. Mostre que $\min\{X_1, X_2\} \sim \exp(\lambda_1+\lambda_2)$.

Solução: Seja $x > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\min\{X_1, X_2\} \leq x) &= 1 - \mathbb{P}(\min\{X_1, X_2\} > x)\\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x)\\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x)\\
&= 1 - e^{-\lambda_1 x}e^{-\lambda_2 x}\\
&= 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}.
\end{aligned}$$

2) **(2.5 pt)** Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. Mostre que X e Y têm a mesma função de distribuição se, e somente se, X e Y têm a mesma distribuição em $\mathbb{R}$.

Solução: Se X e Y, têm a mesma distribuição, então, para todo boreliano B, vale $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(Y \in B)$. Tomando $B = (-\infty, x]$, concluímos que $F_X(x) = F_Y(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Suponha que $F_X(x) = F_Y(x)$. A classe $P = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ é um π-system. Seja $L = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(Y \in B)\}$, que é um λ-system. Pelo Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkim, concluímos que $\sigma(P) \subset L$, ou seja, vale $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(Y \in B)$ para todo boreliano B, mostrando que as distribuições de X e Y são iguais.

3) **(2.5 pt)** Mostre que, se $A_n \searrow A$ e $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) \leq c < 1$ para todo n então $\mathbb{P}(A) = 0$.

Solução: Temos que $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) \leq c < 1$ implica em $\mathbb{P}(A_{n+1}) \leq c\mathbb{P}(A_n)$. Por indução, $\mathbb{P}(A_{n+1}) \leq c^n\mathbb{P}(A_1)$. Como $c < 1$, temos que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$. Pela continuidade da probabilidade, concluímos que $\mathbb{P}(A) = 0$.

4) **(2.5 pt)** Seja $X \sim \exp(\lambda)$ e sejam $0 < b < c$. Encontre a função de distribuição de $Y = \min\{X, c\}$. Encontre a função de distribuição de $Z = \max\{Y, b\}$. Decomponha F_Z em suas partes discreta, absolutamente contínua e singular.

Solução: $F_Y(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{\{x<c\}} + \mathbb{1}_{\{x\geq c\}}$ e $F_Z(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{\{b\leq x<c\}} + \mathbb{1}_{\{x\geq c\}}$.
A função de distribuição F_Z pode ser decomposta como $F_Z = F_{\mathtt{ab}} + F_{\mathtt{d}}$, onde

$$F_{\mathtt{d}}(x) = (1 - e^{-\lambda b})\mathbb{1}_{\{b\leq x<c\}} + \mathbb{1}_{\{x\geq c\}}$$

e $F_{\mathtt{ab}}(x) = F_Z - F_{\mathtt{d}}$.

5) **(extra 1 pt)** Seja $X \sim U[0, 1)$. Construa $Y = f(X)$ e $Z = g(X)$ independentes tais que $Y \sim$ Bernoulli$(1/2)$ e $Z \sim U[0, 1)$.

Solução: Por exemplo, tome $f(x) = \mathbb{1}_{\{10x-\lfloor 10x\rfloor<1/2\}}$ e $g(x) = \lfloor 10x\rfloor$.