Prova 1
Probabilidade - MAT562 2024.2
Prof. Tertuliano Franco
Data: 26/11/2024

1) **(2.5 pt)**

   (a) Sejam $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ e $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ independentes. Mostre que

$$\mathbb{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) \; = \; \binom{n}{k}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^k\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^{n-k}$$

   (b) Sejam $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$ e $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ independentes. Mostre que $\min\{X_1, X_2\} \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

2) **(2.5 pt)** Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. Mostre que X e Y têm a mesma função de distribuição se, e somente se, X e Y têm a mesma distribuição em $\mathbb{R}$.

3) **(2.5 pt)** Mostre que, se $A_n \searrow A$ e $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) \leq c < 1$ para todo n então $\mathbb{P}(A) = 0$.

4) **(2.5 pt)** Seja $X \sim \exp(\lambda)$ e sejam $0 < b < c$. Encontre a função de distribuição de $Y = \min\{X, c\}$. Encontre a função de distribuição de $Z = \max\{Y, b\}$. Decomponha F_Z em suas partes discreta, absolutamente contínua e singular.

5) **(extra 1 pt)** Seja $X \sim U[0, 1)$. Construa $Y = f(X)$ e $Z = g(X)$ independentes tais que $Y \sim \text{Bernoulli}(1/2)$ e $Z \sim U[0, 1)$.