Substitutiva - Gabarito
Resumido
Probabilidade - MAT562 2024.1
Prof. Tertuliano Franco
Data: 23/07/2024

1) **(2 pt)** Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espaço de probabilidade e sejam A_n e B_n eventos tais que $\mathbb{P}(A_n) \to 1$ e $\mathbb{P}(B_n) \to \beta$. Mostre que $\mathbb{P}(A_n \backslash B_n) \to 1 - \beta$.

   Solução: Observe que $\mathbb{P}(A_n \backslash B_n) = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_n \cap B_n)$.

   Por outro lado, $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_n \cap B_n) + \mathbb{P}(A_n^\complement \cap B_n)$. Como $\mathbb{P}(A_n^\complement \cap B_n) \leq \mathbb{P}(A_n^\complement) \to 0$ e $\mathbb{P}(B_n) \to \beta$, temos que $\mathbb{P}(A_n \cap B_n) \to \beta$. Aplicando isto na primeira igualdade mostrada, concluímos que $\mathbb{P}(A_n \backslash B_n) \to 1 - \beta$.

2) **(2 pt)** Considere uma questão de múltipla escolha com n opções, e seja p a probabilidade de determinado aluno saber resolver a questão. Se ele sabe resolver, acerta com certeza, e se não sabe, acerta com probabilidade $1/n$. Dado que ele acertou a resposta, qual a probabilidade de que ele sabia resolver? Calcule os limites dessa probabilidade quando $n \to \infty$ e quando $p \to 0^+$. Interprete.

   Solução: Sejam A o evento *o aluno sabia a resposta* e B o evento *o aluno respondeu corretamente*. Pela Fórmula de Bayes,

$$\mathbb{P}\big(A|B\big) \;=\; \frac{\mathbb{P}\big(B|A\big) \cdot \mathbb{P}\big(A\big)}{\mathbb{P}\big(B|A\big) \cdot \mathbb{P}\big(A\big) + \mathbb{P}\big(B|A^\complement\big) \cdot \mathbb{P}\big(A^\complement\big)} \;=\; \frac{p}{p + \frac{1-p}{n}}\,.$$

   Logo, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(A|B\big) = 1$, o que é razoável: se há um número gigante de alternativas, e o aluno escolhe a correta, é porque ele sabe a resposta (com probabilidade altíssima). Além disso, $\lim_{p\to 0^+} \mathbb{P}\big(A|B\big) = 0$, o que também é razoável: a probabilidade de o aluno saber a resposta é baixíssima, e o fato de o aluno responder corretamente não afeta esta probabilidade, que continua desprezível (no limite com p indo a zero, mantendo a quantidade de questões fixa).

3) **(2 pt)** Seja $X \sim \text{Binom}(n, p)$. Calcule $\mathbb{E}X^3$.

   Solução: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ iid com distribuição Bernoulli(n, p). Portanto, $X \sim X_1 + \cdots + X_n$. Daí, $\mathbb{E}X^3 = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)^3$. Usando a propriedade distributiva, temos que

$$\begin{aligned}(X_1 + \cdots + X_n)^3 \;&=\; (X_1 + \cdots + X_n) \cdot (X_1 + \cdots + X_n) \cdot (X_1 + \cdots + X_n) \\ &=\; \sum_{i=1}^{n} X_i^3 + 3 \sum_{i \neq j} X_i X_j^2 + \sum_{i \neq j \neq k} X_i X_j X_k\,.\end{aligned}$$

   Passando a esperança, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)^3 \;&=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i^3] + 3 \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i X_j^2] + \sum_{i \neq j \neq k} \mathbb{E}[X_i X_j X_k] \\ &=\; np + 3n(n-1)p^2 + n(n-1)(n-2)p^3.\end{aligned}$$

4) **(2 pt)** Suponha que $\mathbb{E}X_n \to 0$ e var $X_n \to 0$. Mostre que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Solução: Por Markov,

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) \;\leq\; \frac{\mathbb{E}X_n^2}{\varepsilon^2} \;=\; \frac{\operatorname{var} X_n + \big(\mathbb{E}X_n\big)^2}{\varepsilon^2} \to 0.$$

5) **(2 pt)** Sejam X_n tais que $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ e $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$. Qual o limite de X_n em:

(a) Probabilidade?

Solução: Temos que $X \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, pois $\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| = n) = \frac{1}{n} \to 0$.

(b) Quase certo?

Solução: como a sequência converge para zero em probabilidade, o único candidato para limite quase certo é zero (pois convergência quase certa implica convergência em probabilidade). Mas não há convergência quase certa para zero pois, por Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(X_n = n \text{ i.v.}) = 1$.

(c) Em distribuição?

Solução: Como $X \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, temos que $X \xrightarrow{d} 0$.

(d) Em L^1?

Solução: como a sequência converge para zero em probabilidade, o único candidato para limite em L^1 é zero (pois convergência em L^1 implica convergência em probabilidade). Mas $\mathbb{E}|X_n - 0| = \mathbb{E}|X_n| = 0 \cdot (1 - \frac{1}{n}) + n \cdot \frac{1}{n}$ que não converge para zero. Logo, não há convergência em L^1.