Prova 2 - Gabarito Resumido
Probabilidade - MAT562 2024.1
Prof. Tertuliano Franco
Data: 16/07/2024

1) **(2pt)** Seja $Y \sim \exp(\lambda)$, com $\lambda > 0$. Calcule $\phi(x) = \mathbb{E}[e^{xY}]$, para $x \in \mathbb{R}$.

Resposta: Temos que

$$\phi(x) = \int_0^\infty e^{xy}\lambda e^{-\lambda y} dy = \int_0^\infty \lambda e^{(x-\lambda)y} dy = \frac{\lambda}{x-\lambda} e^{(x-\lambda)y}\Big|_{y=0}^{y=\infty}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x-\lambda}, & \text{se } x < \lambda \\ +\infty, & \text{se } x \geq \lambda \end{cases}$$

2) **(2,5 pt)** Mostre que se X é integrável, então o mínimo da função $f(c) = \mathbb{E}[(X-c)^2]$ é atingido em $c = \mathbb{E}X$. Conclua disso que se $a \leq X \leq b$, então

$$\operatorname{var} X \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

Resposta: Por linearidade da esperança, temos que $f(c) = c^2 - 2\mathbb{E}X \cdot c + \mathbb{E}X^2$, que é uma função do segundo grau, cujo mínimo é atingido em $c = \mathbb{E}X$. Note que o mínimo é justamente a variância.

Assuma que $a \leq X \leq b$. Escolhendo $c = \frac{a+b}{2}$, o ponto médio do intervalo $[a, b]$, temos que $|X - c| \leq \frac{b-a}{2}$. Daí,

$$\operatorname{var} X \leq \mathbb{E}\Big[(X-c)^2\Big] \leq \Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2 = \frac{(b-a)^2}{4}.$$

3) **(2 pt)** Sejam X_n variáveis aleatórias iid tais que $\mathbb{E}X_1 = \operatorname{var} X_1 = 1$. Mostre que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n X_n^2}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ q.c.}$$

Resposta: Pela Lei dos Grandes Números,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} \mathbb{E}X_1 = 1$$

e

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_n^2 \xrightarrow{\text{q.c.}} \mathbb{E}X_1^2 = \operatorname{var} X_1 + \mathbb{E}X_1 = 2.$$

Portanto,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^{n} X_n^2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_n^2}} \xrightarrow{\text{q.c.}} \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

4) **(2 pt)** Sejam X e Y variáveis aleatórias (num mesmo espaço de probabilidade). Mostre que $F_{(X,Y)}(x,y) \leq \sqrt{F_X(x)F_Y(y)}$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Resposta: Usando Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{E}\Big[1_{[X\leq x]\cap[Y\leq y]}\Big] = \mathbb{E}\Big[1_{[X\leq x]} \cdot 1_{[Y\leq y]}\Big] \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}\Big[1^2_{[X\leq x]}\Big] \cdot \mathbb{E}\Big[1^2_{[Y\leq y]}\Big]} = \sqrt{F_X(x)F_Y(y)}\,. \end{aligned}$$

5) **(2 pt)** Sejam X_i iid com distribuição $\exp(1)$. Mostre que

(a) $\mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{\log n} > 1 \text{ infinitas vezes }\Big) = 1.$

(b) $\mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{\log n} > 2 \text{ infinitas vezes }\Big) = 0.$

Resposta: Temos que $\mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{\log n} > x\Big) = \mathbb{P}\big(X_n > x \log n\big) = \exp(-x\log n) = \frac{1}{n^x}$, que nos dá uma série divergente se $x = 1$ e uma série convergente se $x = 2$. Aplicando o Lema de Borel-Cantelli, temos o resultado.

6) **(3 pt)** Sejam $X_1, X_2, \dots$ iid. Defina $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Mostre que:

(a) Se $X_i \sim \exp(1)$, então $M_n - \log n \xrightarrow{d} X$, onde X tem função de distribuição

$$F_X(x) = \exp\big(-e^{-x}\big)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Resposta:

$$\begin{aligned} F_{M_n - \log n}(x) &= \mathbb{P}\Big(M_n - \log n \leq x\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(M_n \leq x + \log n\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(X_1 \leq x + \log n, \dots, X_n \leq x + \log n\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(X_1 \leq x + \log n\Big)^n \qquad (X_n \text{ são iid}) \\ &= \Big(1 - \exp(-x - \log n)\Big)^n \qquad (\text{para } n \text{ suficientemente grande}) \\ &= \Big(1 - \frac{e^{-x}}{n}\Big)^n \longrightarrow e^{-e^{-x}}\,. \end{aligned}$$

(b) Se $F_{X_i}(x) = 1 - x^{-\alpha}$ para $x \geq 1$, com $\alpha > 0$, então $M_n/n^{\frac{1}{\alpha}} \xrightarrow{d} X$, onde X tem função de distribuição

$$F_X(x) \;=\; \exp\big(-x^{-\alpha}\big)\,, \quad \forall x > 0.$$

Resposta:

$$\begin{aligned}
F_{M_n/n^{\frac{1}{\alpha}}}(x) &= \mathbb{P}\Big(M_n/n^{\frac{1}{\alpha}} \leq x\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(M_n \leq x \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(X_1 \leq x \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}, \ldots, X_n \leq x \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(X_1 \leq x \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}\Big)^n \qquad (X_n \text{ são iid}) \\
&= \Big(1 - (x \cdot n^{\frac{1}{\alpha}})^{-\alpha}\Big)^n \qquad (\text{para } n \text{ suficientemente grande}) \\
&= \Big(1 - \frac{x^{-\alpha}}{n}\Big)^n \longrightarrow e^{-x^{-\alpha}}
\end{aligned}$$

(c) Se $F_{X_i}(x) = 1 - |x|^{\beta}$ para $-1 \leq x \leq 0$, com $\beta > 0$, então $n^{\frac{1}{\beta}} M_n \xrightarrow{d} X$, onde X tem função de distribuição

$$F_X(x) \;=\; \exp\big(-|x|^{\beta}\big)\,, \quad \forall x < 0.$$

Resposta: Seja $-1 \leq x \leq 0$.

$$\begin{aligned}
F_{n^{\frac{1}{\beta}} M_n}(x) &= \mathbb{P}\Big(n^{\frac{1}{\beta}} M_n \leq x\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(M_n \leq x \cdot n^{-\frac{1}{\beta}}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(X_1 \leq x \cdot n^{-\frac{1}{\beta}}, \ldots, X_n \leq x \cdot n^{-\frac{1}{\beta}}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(X_1 \leq x \cdot n^{-\frac{1}{\beta}}\Big)^n \qquad (X_n \text{ são iid}) \\
&= \Big(1 - \big|x \cdot n^{-\frac{1}{\beta}}\big|^{\beta}\Big)^n \qquad (\text{para } n \text{ suficientemente grande}) \\
&= \Big(1 - \frac{|x|^{\beta}}{n}\Big)^n \longrightarrow e^{-|x|^{\beta}}
\end{aligned}$$