Prova 2
Probabilidade - MAT562 2024.1
Prof. Tertuliano Franco
Data: 16/07/2024

1) **(2pt)** Seja $Y \sim \exp(\lambda)$, com $\lambda > 0$. Calcule $\phi(x) = \mathbb{E}[e^{xY}]$, para $x \in \mathbb{R}$.

2) **(2,5 pt)** Mostre que se $X$ é integrável, então o mínimo da função $f(c) = \mathbb{E}[(X - c)^2]$ é atingido em $c = \mathbb{E}X$. Conclua disso que se $a \leq X \leq b$, então

$$\operatorname{var} X \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

3) **(2 pt)** Sejam $X_n$ variáveis aleatórias iid tais que $\mathbb{E}X_1 = \operatorname{var} X_n = 1$. Mostre que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^{n} X_n^2}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{q.c.}$$

4) **(2 pt)** Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias (num mesmo espaço de probabilidade). Mostre que $F_{(X,Y)}(x,y) \leq \sqrt{F_X(x) F_Y(y)}$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

5) **(2 pt)** Sejam $X_i$ iid com distribuição $\exp(1)$. Mostre que

   (a) $\mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{\log n} > 1 \text{ infinitas vezes}\Big) = 1.$

   (b) $\mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{\log n} > 2 \text{ infinitas vezes}\Big) = 0.$

6) **(3 pt)** Sejam $X_1, X_2, \ldots$ iid. Defina $M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Mostre que:

   (a) Se $X_i \sim \exp(1)$, então $M_n - \log n \xrightarrow{d} X$, onde $X$ tem função de distribuição

$$F_X(x) = \exp\big(-e^{-x}\big), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   (b) Se $F_{X_i}(x) = 1 - x^{-\alpha}$ para $x \geq 1$, com $\alpha > 0$, então $M_n / n^{\frac{1}{\alpha}} \xrightarrow{d} X$, onde $X$ tem função de distribuição

$$F_X(x) = \exp\big(-x^{-\alpha}\big), \quad \forall x > 0.$$

   (c) Se $F_{X_i}(x) = 1 - |x|^{\beta}$ para $-1 \leq x \leq 0$, com $\beta > 0$, então $n^{\frac{1}{\beta}} M_n \xrightarrow{d} X$, onde $X$ tem função de distribuição

$$F_X(x) = \exp\big(-|x|^{\beta}\big), \quad \forall x < 0.$$