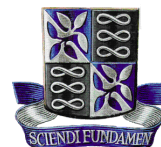




Prova 2
Probabilidade - MAT562 2024.1
Prof. Tertuliano Franco
Data: 16/07/2024



- 1) **(2pt)** Seja $Y \sim \exp(\lambda)$, com $\lambda > 0$. Calcule $\phi(x) = \mathbb{E}[e^{xY}]$, para $x \in \mathbb{R}$.
- 2) **(2,5 pt)** Mostre que se X é integrável, então o mínimo da função $f(c) = \mathbb{E}[(X - c)^2]$ é atingido em $c = \mathbb{E}X$. Conclua disso que se $a \leq X \leq b$, então

$$\text{var } X \leq \frac{(b - a)^2}{4}$$

- 3) **(2 pt)** Sejam X_n variáveis aleatórias iid tais que $\mathbb{E}X_1 = \text{var } X_n = 1$. Mostre que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n X_i^2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ q.c.}$$

- 4) **(2 pt)** Sejam X e Y variáveis aleatórias (num mesmo espaço de probabilidade). Mostre que $F_{(X,Y)}(x, y) \leq \sqrt{F_X(x)F_Y(y)}$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

- 5) **(2 pt)** Sejam X_i iid com distribuição $\exp(1)$. Mostre que

(a) $\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} > 1 \text{ infinitas vezes}\right) = 1.$

(b) $\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} > 2 \text{ infinitas vezes}\right) = 0.$

- 6) **(3 pt)** Sejam X_1, X_2, \dots iid. Defina $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Mostre que:

- (a) Se $X_i \sim \exp(1)$, então $M_n - \log n \xrightarrow{d} X$, onde X tem função de distribuição

$$F_X(x) = \exp(-e^{-x}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- (b) Se $F_{X_i}(x) = 1 - x^{-\alpha}$ para $x \geq 1$, com $\alpha > 0$, então $M_n/n^{\frac{1}{\alpha}} \xrightarrow{d} X$, onde X tem função de distribuição

$$F_X(x) = \exp(-x^{-\alpha}), \quad \forall x > 0.$$

- (c) Se $F_{X_i}(x) = 1 - |x|^\beta$ para $-1 \leq x \leq 0$, com $\beta > 0$, então $n^{\frac{1}{\beta}} M_n \xrightarrow{d} X$, onde X tem função de distribuição

$$F_X(x) = \exp(-|x|^\beta), \quad \forall x < 0.$$