Prova 1 - **Gabarito Resumido**
Probabilidade - MAT562 2024.1
Prof. Tertuliano Franco
Data: 30/04/2024

1) **(2.5 pt)** Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes tais que $X \sim$ geom(p_1) e $X \sim$ geom(p_2). Mostre que $Z = \min\{X, Y\} \sim$ geom$\big(1-(1-p_1)(1-p_2)\big)$. Interprete este resultado.

   Solução: Temos que $\mathbb{P}\big(Z > k\big) = \mathbb{P}\big(\min\{X,Y\} > k\big) = \mathbb{P}\big(X > k, Y > k\big) = \mathbb{P}\big(X > k\big) \cdot \mathbb{P}\big(Y > k\big) = (1-p_1)^k(1-p_2)^k = \Big((1-p_1)(1-p_2)\Big)^k$. Logo $Z = \min\{X,Y\} \sim$ geom$\big(1-(1-p_1)(1-p_2)\big)$.

   O resultado é natural se pensarmos uma geométrica como o primeira vez em que temos sucesso em repetições sucessivas independentes de um experimento. No caso, fazemos dois experimentos, um com probabilidade p_1 e outro com probabilidade p_2. Como os experimentos são independentes entre si, a probabilidade de obter sucesso em pelo menos um deles é igual a um menos a probabilidade de nenhum ocorrer, que é igual a $1-(1-p_1)(1-p_2)$. Ou seja, o mínimo de X e Y é uma geométrica de parâmetro $1-(1-p_1)(1-p_2)$.

2) **(2.5 pt)** Mostre que uma variável aleatória X é independente de si mesma se, e somente se, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

   Solução: ($\Rightarrow$) Se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{P}(X = c) = 1$, então, para qualquer boreliano B, temos que $\mathbb{P}(X \in B) \in \{0, 1\}$. Daí, podemos provar que

$$\mathbb{P}(X \in B_1, X \in B_2) = \mathbb{P}(X \in B_1) \cdot \mathbb{P}(X \in B_2)$$

   bastando analisar cada caso (se c pertence ou não a cada B_i).

   ($\Leftarrow$) Suponha que X é independente de si mesmo. Logo, $\mathbb{P}(X = x, X = x) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = x)^2$. Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $\mathbb{P}(X = x) \in \{0, 1\}$. Como a função de distribuição converge para zero no menos infinito e para um no mais infinito, existe

$$c \;=\; \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = 0\} \;<\; \infty\,.$$

   Como a função de distribuição é contínua à direita e $F_X(x) = 1$ para todo $x > c$, temos que $F_X(x) = 1$, logo $\mathbb{P}(X = c) = F_X(c) - F_X(c^-) = 1 - 0 = 1$.

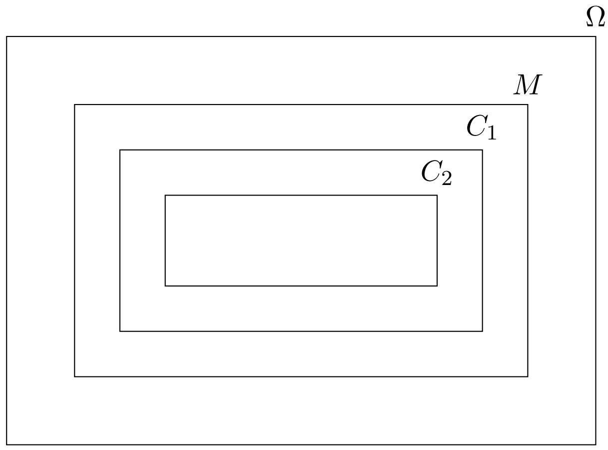
3) **(2.5 pt)** Mariana quer enviar uma carta a Aderbal. A probabilidade de que Mariana escreva a carta é de 0.8. A probabilidade de que o correio não a perca, dado que Mariana a escreveu, é 0.9. A probabilidade de que o carteiro entregue na casa certa, dado que o correio não a perdeu, é de 0.7. Dado que Aderbal não recebeu a carta, qual a probabilidade de que Mariana não a tenha escrito?

   Solução:

Sejam os eventos:

$$\begin{aligned} M &= [\text{ Mariana escreve a carta }] \\ C_1 &= [\text{ correio não perde a carta de Mariana }] \\ C_2 &= [\text{ carteiro entrega a carta de Mariana }] \end{aligned}$$

Nosso objetivo é calcular $\mathbb{P}(M^{\complement} \,|\, C_2^{\complement})$. Observe que $C_2 \subset C_1 \subset M$. Daí,



$$\mathbb{P}(M^{\complement} \,|\, C_2^{\complement}) = \frac{\mathbb{P}(C_2^{\complement} \cap M^{\complement})}{\mathbb{P}(C_2^{\complement})} = \frac{\mathbb{P}(M^{\complement})}{\mathbb{P}(C_2^{\complement})} = \frac{1-0.8}{\mathbb{P}(C_2^{\complement})} = \frac{0.2}{\mathbb{P}(C_2^{\complement})},$$

pois $M^{\complement} \subset C_2^{\complement}$. Falta calcular $\mathbb{P}(C_2^{\complement})$. Temos que

$$\mathbb{P}(C_2) = \mathbb{P}(C_2 \,|\, C_1)\mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C_2 \,|\, C_1)\mathbb{P}(C_1 \,|\, M)\mathbb{P}(M) = 0.7 \cdot 0.9 \cdot 0.8.$$

Logo,

$$\mathbb{P}(M^{\complement} \,|\, C_2^{\complement}) = \frac{0.2}{1 - 0.7 \cdot 0.9 \cdot 0.8}.$$

4) **(2.5 pt)** Sejam X, Y independentes com distribuição $\exp(\lambda)$, com $\lambda > 0$. Mostre que $\frac{X}{X+Y} \sim U[0,1]$.

1a Solução: Como exponenciais assumem apenas valores não negativos, basta calcular $F_{\frac{X}{X+Y}}(r)$ para $) < r < 1$. Vejamos:

$$\mathbb{P}\Big(\frac{X}{X+Y} \le r\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{1-r}{r} X \le Y) = \mathbb{P}\Big((X,Y) \in R\Big),$$

onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge (\frac{1-r}{r})x\}$. Como a exponencial tem densidade, e X e Y são independentes,

$$\mathbb{P}\Big((X,Y) \in R\Big) = \int_0^\infty \int_{(\frac{1-r}{r})x}^\infty \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dy\, dx = r$$

2a Solução: Considere o vetor aletório $(X+Y, \frac{X}{X+Y})$ e siga o método do jacobiano.

5) **(extra 2 pt)** Seja $\gamma > 0$ e considere o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$, onde $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$, a σ-álgebra $\mathbb{A}$ é o conjunto das partes de Ω e

$$\mathbb{P}(\{k\}) \;=\; \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{k^{1+\gamma}}\,,$$

onde $C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\gamma}}$ é a constante de normalização.

(a) Para ℓ número natural, denote $A_\ell = \{k \,:\, k \text{ é múltiplo de } \ell\}$. Mostre que $\mathbb{P}(A_\ell) = \frac{1}{\ell^{1+\gamma}}$.

(b) Denote por $p_1, p_2, p_3, \ldots$ a sequência crescente dos números primos. Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $B_i = \{k \,:\, k \text{ é múltiplo de } p_i\}$. Mostre que os conjuntos $B_1, B_2, \ldots$ são independentes.

(c) Prove a chamada *Fórmula de Euler para a Função Zeta de Riemann*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\gamma}} \;=\; \prod_{j=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{p_j^{1+\gamma}}\Big)^{-1}.$$

Dica: Mostre que $\{1\} = B_1^\complement \cap B_2^\complement \cap B_3^\complement \cap \cdots$ e use também a continuidade da probabilidade.

Solução: (a) $\mathbb{P}\big(A_\ell\big) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ell k)^{1+\gamma}} = \frac{1}{\ell^{1+\gamma}}\frac{1}{C}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\gamma}} = \frac{1}{\ell^{1+\gamma}}.$

(b) Sejam $i_1, \ldots, i_m$ índices. Então, usando o item (a), temos que $\mathbb{P}\big(B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_m}\big) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(kp_{i_1}\cdots p_{i_m})^{1+\gamma}} = \frac{1}{p_{i_1}^{1+\gamma}} \cdots \frac{1}{p_{i_m}^{1+\gamma}} = \mathbb{P}\big(B_{i_1}\big)\cdots\mathbb{P}\big(B_{i_m}\big).$

(c) Temos que $k \in B_1^\complement \cap B_2^\complement \cap B_3^\complement \cap \cdots$ se, e somente se, k não é múltiplo de nenhum número primo. O que é equivalente a dizer que $k = 1$. Como $B_1^\complement \cap \cdots \cap B_M^\complement \searrow \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j^\complement$, pela Continuidade da Probabilidade, temos que

$$\lim_{M\to\infty} \mathbb{P}\big(B_1^\complement \cap \cdots \cap B_M^\complement\big) \;=\; \mathbb{P}\big(\{1\}\big) \;=\; \frac{1}{C} \;=\; \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\gamma}}}\,.$$

Pelo item (b), os eventos B_i são independentes, logo podemos reescrever a igualdade acima como

$$\prod_{j=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{1}{p_j^{1+\gamma}}\Big) \;=\; \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\gamma}}\Big)^{-1}.$$