Prova 1
Probabilidade - MAT562 2024.1
Prof. Tertuliano Franco
Data: 30/04/2024

1) **(2.5 pt)** Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes tais que $X \sim \text{geom}(p_1)$ e $X \sim \text{geom}(p_2)$. Mostre que $Z = \min\{X, Y\} \sim \text{geom}\big(1 - (1-p_1)(1-p_2)\big)$. Interprete este resultado.

2) **(2.5 pt)** Mostre que uma variável aleatória X é independente de si mesma se, e somente se, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

3) **(2.5 pt)** Mariana quer enviar uma carta a Aderbal. A probabilidade de que Mariana escreva a carta é de 0.8. A probabilidade de que o correio não a perca, dado que Mariana a escreveu, é 0.9. A probabilidade de que o carteiro entregue na casa certa, dado que o correio não a perdeu, é de 0.7. Dado que Aderbal não recebeu a carta, qual a probabilidade de que Mariana não a tenha escrito?

4) **(2.5 pt)** Sejam X, Y independentes com distribuição $\exp(\lambda)$, com $\lambda > 0$. Mostre que $\frac{X}{X+Y} \sim U[0,1]$.

5) **(extra 2 pt)** Seja $\gamma > 0$ e considere o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$, onde $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$, a σ-álgebra $\mathbb{A}$ é o conjunto das partes de Ω e

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{k^{1+\gamma}},$$

onde $C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\gamma}}$ é a constante de normalização.

(a) Para ℓ número natural, denote $A_\ell = \{k : k \text{ é múltiplo de } \ell\}$. Mostre que $\mathbb{P}(A_\ell) = \frac{1}{\ell^{1+\gamma}}$.

(b) Denote por $p_1, p_2, p_3, \ldots$ a sequência crescente dos números primos. Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $B_i = \{k : k \text{ é múltiplo de } p_i\}$. Mostre que os conjuntos $B_1, B_2, \ldots$ são independentes.

(c) Prove a chamada *Fórmula de Euler para a Função Zeta de Riemann*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\gamma}} = \prod_{j=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{p_j^{1+\gamma}}\Big)^{-1}.$$

Dica: Mostre que $\{1\} = B_1^{\complement} \cap B_2^{\complement} \cap B_3^{\complement} \cap \cdots$ e use também a continuidade da probabilidade.