Prova 1
Gabarito Resumido
MATA97 - Matemática Discreta II
Semestre 2024.1
Data: 15/07/2024
Prof. Tertuliano

1	
2	
3	
4	
5	
6	

Nome:____

(1) **(4 pt)** Considere $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ com a ordem parcial definida pelo diagrama de Hasse abaixo.

(a) Determine, se houver, o maior e o menor elemento de X e os elementos minimais e maximais de X.

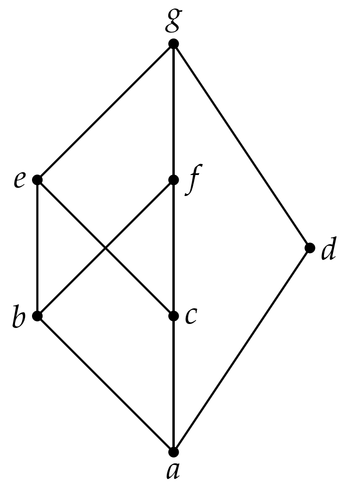
Resposta: g é máximo, a é o mínimo.

(b) Determine os elementos maximais e minimais de $B = \{b, c, d, e, f\}$.

Resposta: maximais = $\{e, f, d\}$, minimais = $\{b, c, d\}$.

(c) Determine uma cadeia de tamanho quatro e uma anticadeia de tamanho três.

Resposta: cadeia: $\{a, c, f, g\}$ (tem outras), anticadeia: $\{b, c, d\}$ (tem outras).



(d) Seja $A = \{a, b, c\}$. Determine o conjunto das cotas superiores de A. **Resposta:** $\{e, f, g\}$.

O conjunto A possui supremo?

Resposta: não, pois o conjunto das cotas superiores não tem menor elemento.

(e) X é reticulado? X é reticulado completo?

Resposta: não é reticulado, pois não existe $b \vee c$, e não é reticulado completo pois não é nem reticulado,

(f) Determine o conjunto dos complementos de d.

Resposta: $\{b, c, e, f\}$

(g) X é reticulado distributivo?

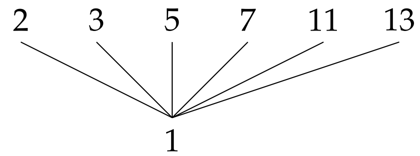
Resposta: não é reticulado.

(h) X é reticulado booleano?

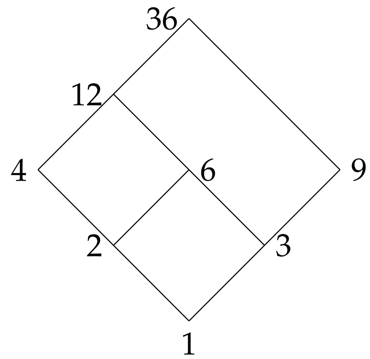
Resposta: não é reticulado

(2) **(2 pt)** Desenhe os diagramas de Hasse de

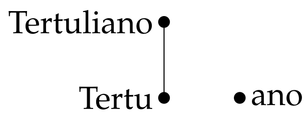
(a) $X = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ com a ordem divisibilidade.
Resposta:



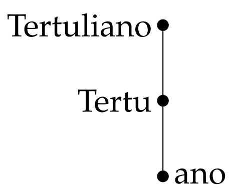
(b) $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 36\}$ com ordem divisibilidade.
Resposta:



(c) $X = \{\text{Tertuliano}, \text{Tertu}, \text{ano}\}$ com a ordem prefixo.
Resposta:



(d) $X = \{\text{Tertuliano}, \text{Tertu}, \text{ano}\}$ com a ordem lexicográfica.
Resposta:



(3) **(2 pt)** Prove que se $(X, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado tal que $\perp$ e $\top$ existem e $\perp = \top$, então X é um conjunto unitário.

Resposta: Seja $b \in X$. Logo $\perp \leq b \leq \top = \perp$. Como $\perp \leq b$ e $b \leq \perp$, por antissimetria, concluímos que $b = \perp = \top$.

(4) **(2 pt)** Seja X reticulado tal que vale $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ para quaisquer $a, b, c \in X$. Mostre que X é distributivo.

Resposta: Sejam

$$\begin{array}{ll} \text{(D1)} & a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \forall a, b, c \\ \text{(D2)} & a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad \forall a, b, c \end{array}$$

A questão pede para mostrar que (D2) implica em (D1). Vamos começar com o lado direito de (D1) e chegar no lado esquerdo de (D1).

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \vee (a \wedge c) &\overset{\text{(D2)}}{=} \big((a \wedge b) \vee a\big) \wedge \big((a \wedge b) \vee c\big) \\ &\overset{\text{absorção}}{=} a \wedge \big((a \wedge b) \vee c\big) \\ &\overset{\text{comutatividade}}{=} a \wedge \big(c \vee (a \wedge b)\big) \\ &\overset{\text{(D2)}}{=} a \wedge \big((c \vee a) \wedge (c \vee b)\big) \\ &\overset{\text{associatividade}}{=} \big(a \wedge (c \vee a)\big) \wedge (c \vee b) \\ &\overset{\text{absorção}}{=} a \wedge (c \vee b) \\ &\overset{\text{comutatividade}}{=} a \wedge (b \vee c) \end{aligned}$$

(5) **(Extra 1pt)** Um átomo de uma álgebra booleana $(A, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1)$ são os elementos $x \in A$ que **não** podem ser expressos na forma $x = y + z$ com $x \neq y$ e $x \neq z$.

(a) Quais são os átomos de $(2^S, \cup, \cap, {}^{\complement}, \emptyset, S)$?

Resposta: O conjunto vazio e todos os conjuntos unitários.

(b) Seja B_n o conjunto das *n-strings* binárias com ordem parcial coordenada a coordenada. Quais são os átomos de B_n?

Resposta: A lista com apenas zeros e as listas com exatamente uma entrada igual a 1.

(6) **(Extra 1pt)** Seja $X = [a, b] \times [a, b]$ e $f : X \to X$ função monótona com respeito à ordem parcial coordenada a coordenada. Mostre que f possui um ponto fixo.

Resposta: Como $(X, \leq)$ é reticulado completo e f é monótona com respeito à ordem parcial considerada, pelo Teorema de Tarski, o conjunto dos pontos fixos é reticulado completo não-vazio, logo existe pelo menos um ponto fixo.