Prova 2
MATA97 - Matemática
Discreta II
Semestre 2023.2
Data: 13/12/2023
Prof. Tertuliano

(1) **(2.5 pt)** Seja F_i o i-ésimo elemento da sequência de Fibonacci, onde $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Prove que $F_0^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

Solução: Por indução: como $F_2 = F_1 + F_0 = 0+1 = 1$, temos que $F_0^2 + F_1^2 = 0+1 = 1 = F_1 F_2$, o que nos dá a base de indução. Suponha que o resultado valha para um certo $n \geq 1$, ou seja,

$$F_0^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}\,.$$

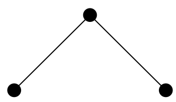
Somando F_{n+1}^2 a ambos os lados da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} F_0^2 + \cdots + F_n^2 + F_{n+1}^2 &= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}\big(F_n + F_{n+1}\big) \\ &= F_{n+1} F_{n+2}\,. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Princício de Indução, concluímos que vale $F_0^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

(2) **(2.5 pt)** Defina conjunto bem-ordenado. Defina conjunto bem-fundado. Todo conjunto bem-ordenado é bem-fundado? Todo conjunto bem-fundado é bem-ordenado? Prove ou dê contra-exemplo.

Solução: Bem-ordenado: todo subconjunto não-vazio possui menor elemento. Bem-fundado: todo subconjunto não-vazio possui elemento minimal (definição equivalente, como provado em sala: conjunto **não** possui sequência infinitamente decrescente infinitamente). Como todo menor elemento elemento é minimal, bem-ordenado implica bem fundado. Exemplo de conjunto que é bem-fundado mas não é bem ordenado (via diagrama de Hasse):



(3) **(2.5 pt)** Classifique as relações abaixo em reflexiva, antirreflexiva, simétrica, antissimétrica, transititiva, ordem parcial, ordem parcial estrita, de equivalência. Caso seja de equivalência, determine as classes de equivalência.

(a) $\mathcal{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $x\mathcal{R}y$ se, e somente se, $(x-y)^2 \leq 1$.
Solução: Reflexiva, simétrica.

(b) $\mathcal{R}$ em $\mathbb{N}$ dada por $x\mathcal{R}y$ se, e somente se, $x - 2y \geq 0$.
Solução: Antissimétrica e transitiva.

(c) $\mathcal{R}$ em $\mathbb{Z}$ dada por $x\mathcal{R}y$ se, e somente se, $|x| = |y|$.

Solução: De equivalência, e cada par $\{k, -k\}$ é uma classe de equivalência.

(d) $\mathcal{R}$ em $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ dada por $x\mathcal{R}y$ se, e somente se, $x|y$.

Solução: ordem parcial.

(e) $\mathcal{R}$ em $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ dada por $x\mathcal{R}y$ se, e somente se, $x|y$.

Solução: Reflexiva e transitiva. Mas não é antissimétrica pois $-2|2$ e $2|-2$, nem simétrica pois $2|4$ mas $4 \not| 2$.

(4) (a) **(0.5 pt)** Use o Algoritmo Euclidiano do mdc para encontrar o maior dividor comum de 180 e 140.

Solução:

$$\begin{aligned} 180 &= 140 \times 1 + 40 \\ 140 &= 40 \times 3 + 20 \\ 40 &= 20 \times 2 + 0\,. \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{mdc}(180, 140) = 20$.

(b) **(1.0 pt)** Sejam $a \geq b > 0$ naturais, e sejam q e r o quociente e o resto na divisão de a por b. Mostre que $a > 2r$. Conclua que $ab > 2br$.

Solução: $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$. Como $a \geq b$, temos que $q \geq 1$. Portanto, $a > b + r > 2r$. Multiplicando por b (que é estritamente positivo) obtemos $ab > 2br$.

(c) **(1.0 pt)** Mostre que o número de divisões no Algoritmo Euclidiano para encontrar o mdc de a e b, com $a \geq b > 0$, é menor ou igual a $\log_2 a + \log_2 b$.

Solução:

A sequência de divisões no Algoritmo de Euclides é a seguinte:

$$\begin{aligned} a &= b \times q_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b \\ b &= r_1 \times q_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2 \times q_2 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{k-1} &= r_k \times q_k + r_{k+1}, \quad 0 \leq r_{k+1} < r_k \\ r_k &= r_{k+1} \times q_{k+1} + 0 \end{aligned}$$

Note que paramos o algoritmo quando a divisão deixa resto zero. Ou seja, $r_j > 0$ para $j = 1, \dots, k+1$.

Usando o item anterior, temos que $ab > 2br_1 > 2^2 r_1 r_2 > 2^3 r_2 r_3 > \cdots > 2^{k+1} r_k r_{k+1} > 2^{k+1} \cdot 2 = 2^{k+2}$, pois $r_k > r_{k+1} \geq 1$. Passando o logaritmo na base 2, obtemos $k + 2 \leq \log_2 a + \log_2 b$, e note que $k + 2$ é justamente o número de divisões.