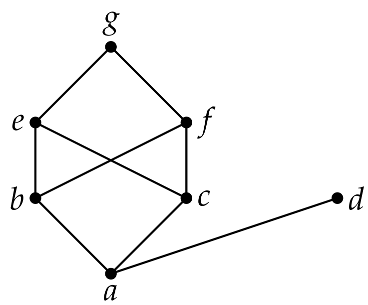
Prova 1 - Gabarito
MATA97 - Matemática Discreta II
Semestre 2023.2
Data: 27/09/2023
Prof. Tertuliano

(1) **(2.5 pt)** Considere $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ com a ordem parcial definida pelo diagrama de Hasse abaixo. Justifique cada resposta a seguir:



(a) Determine, se houver, o maior e o menor elemento de X.
Solução: $\perp = a$. Não há $\top$.

(b) Determine os elementos minimais e maximais de X.
Solução: Minimais: a. Maximais: g e d.

(c) Determine uma cadeia (de tamanho máximo) em X.
Solução: Pode ser $\{a, b, e, g\}$ ou $\{a, b, f, g\}$ ou $\{a, c, e, g\}$ ou $\{a, c, f, g\}$.

(d) X é reticulado?
Solução: Não, pois não existe $b \vee c$, já que o conjunto das cotas superiores de $\{b, c\}$ é $\{e, f\}$ que não possui menor elemento (e e f são minimais).

(e) X é reticulado completo?
Solução: Não, pois não existe $b \vee c$ (se não é reticulado, em particular não pode ser reticulado completo).

(2) **(2.5 pt)** Seja $(X, \leq)$ conjunto parcialmente ordenado. Suponha que X possua um maior elemento m. Mostre que este elemento é único. Prove o mesmo para o menor elemento.

Solução: Sejam m_1 e m_2 dois maiores elementos de X. Logo, para todo $x \in X$ vale que $x \leq m_1$ e $x \leq m_2$. Em particular, vale que $m_1 \leq m_2$ e $m_2 \leq m_1$ que, por antissimetria, implica $m_1 = m_2$. Para o menor elemento, aplicamos o princípio da dualidade ou adaptamos a prova anterior.

(3) **(2.5 pt)** Um reticulado é dito *modular* se $a \leq c$ implica que $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$. Mostre que todo reticulado distributivo é modular.

Solução: Como o reticulado é distributivo, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Como $a \leq c$, temos que $a \vee c = c$. Substituindo na equação anterior, obtemos $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

(4) **(2.5 pt)** Mostre que em um reticulado booleano vale que $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$.

Solução: Temos que mostrar duas coisas, que $(a \wedge b) \vee (\overline{a} \vee \overline{b}) = 1$ e $(a \wedge b) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}) = 0$. Para a primeira:

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (\overline{a} \vee \overline{b}) &\overset{\text{associat.}}{=} \Big((a \wedge b) \vee \overline{a}\Big) \vee \overline{b} \\
&\overset{\text{distribut.}}{=} \Big((a \vee \overline{a}) \wedge (b \vee \overline{a})\Big) \vee \overline{b} \\
&\overset{\text{complem.}}{=} \Big(1 \wedge (b \vee \overline{a})\Big) \vee \overline{b} \\
&\overset{\text{maior elem.}}{=} \Big(b \vee \overline{a}\Big) \vee \overline{b} \\
&\overset{\text{comut.}}{=} \Big(\overline{a} \vee b\Big) \vee \overline{b} \\
&\overset{\text{assoc.}}{=} \overline{a} \vee \Big(b \vee \overline{b}\Big) \\
&\overset{\text{complem.}}{=} \overline{a} \vee 1 \\
&\overset{\text{maior elem.}}{=} 1\,.
\end{aligned}$$

Para a segunda:

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}) &\overset{\text{distrib.}}{=} \Big((a \wedge b) \wedge \overline{a}\Big) \vee \Big((a \wedge b) \wedge \overline{b}\Big) \\
&= (b \wedge 0) \vee (a \wedge 0) \\
&= 0 \wedge 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

(5) **(Extra 2pt)** Seja X reticulado completo. Dizemos que uma função $f : X \to X$ preserva supremo se $f(\bigvee S) = \bigvee f(S)$ para todo $S \subseteq X$. Se $f : X \to X$ preserva supremo, f é monótona? Prove ou dê contra-exemplo.

Solução: Sejam $a \leq b$. Logo, $a \wedge b = b$. Como f preserva supremo, temos que $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b) = f(b)$. Como $f(a) \wedge f(b) = f(b)$, concluímos que $f(a) \leq f(b)$ e portanto f é monótona.