Prova 3 - Gabarito Resumido
MAT508 - Análise no $\mathbb{R}^n$
Semestre 2023.2
Prof. Tertuliano
Prova 3 - 11/12/2023

1) Dado um campo vetorial $F = (F_1, F_2, F_3)$ em $\mathbb{R}^3$, definimos as formas

$$\begin{aligned} \omega_F^1 &= F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz \\ \omega_F^2 &= F_1\, dy \wedge dz - F_2\, dx \wedge dz + F_3\, dx \wedge dy \end{aligned}$$

(a) Defina $\nabla \times F$ como o produto vetorial (formal) de ∇ por F, nesta ordem. Mostre a partir disso que

$$\nabla \times F = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) .$$

(b) Seja f uma forma de ordem zero em $\mathbb{R}^3$. Mostre as seguintes identidades:

$$df = \omega^1_{\nabla f}\,, \tag{1}$$
$$d(\omega_F^1) = \omega^2_{\nabla \times F}\,, \tag{2}$$
$$d(\omega_F^2) = (\nabla \cdot F)\, dx \wedge dy \wedge dz\,. \tag{3}$$

(c) Use o item anterior para mostrar que $\nabla \times (\nabla f) = 0$ e que $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$.

(d) Suponha que F é um campo vetorial sobre um aberto estrelado $A \subset \mathbb{R}^3$ e que $\nabla \times F = 0$. Mostre que existe forma f de ordem zero tal que $F = \nabla f$.

(e) Suponha que F é um campo vetorial sobre um aberto estrelado $A \subset \mathbb{R}^3$ e que $\nabla \cdot F = 0$. Mostre que existe campo vetorial G tal que $F = \nabla \times G$.

Solução:

(a) Definindo de maneira formal $\phi(u) = \det(\nabla, F, u)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \phi(u) &= u_1\Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\Big) + u_2\Big(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\Big) + u_1\Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) \\ &= \Big\langle u, \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)\Big\rangle \end{aligned}$$

portanto $\nabla \times F = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)$ pela definição de produto vetorial.

(b) Basta aplicar a definição de diferencial de uma forma.

(c) De $df = \omega_c^1$, temos que $0 = d^2 f = d(\omega^1_{\nabla f}) = \omega^2_{\nabla \times (\nabla f)}$ que implica que $\nabla \times (\nabla f) = 0$. De $0 = d^2(\omega_F^1) = d(\omega^2_{\nabla \times F}) = (\nabla \cdot (\nabla \times F))\, dx \wedge dy \wedge dz$, temos que $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$.

(d) Como A é aberto estrelado e $d(\omega_F^1) = \omega^2_{\nabla\times F} = 0$, pois $\nabla \times F = 0$, temos pelo Lema de Poincaré que $\omega_F^1 = df$ para alguma zero-forma f. Portanto, $F = \nabla f$.

(e) Como A é aberto estrelado e $d(\omega_F^2) = (\nabla \cdot F) dx \wedge dy \wedge dz = 0$, temos pelo Lema de Poincaré que $\omega_F^2 = d\eta$ para alguma 1-forma $\eta = G_1 dx + G_2 dy + G_3 dz$. Como $d(\eta) = d(\omega_G^1) = \omega^2_{\nabla\times G}$, temos que $F = \nabla \times G$.

2) Seja V espaço vetorial de dimensão n.

(a) Seja $v_1, \ldots, v_n$ uma base de V. Dados os vetores $w_1, \ldots, w_n$, sejam a_{ij} os coficientes definidos por

$$w_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \,.$$

Dados $\omega \in \Omega^n(V)$, mostre que $\omega(w_1, \ldots, w_n) = \det(a_{ij}) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_n)$.

(b) Sendo $\omega \in \Omega^n(V)$ o elemento de volume determinado pelo produto interno T com orientação μ, e dados $w_1, \ldots, w_n \in V$, mostre que

$$|\omega(w_1, \ldots, w_n)| \;=\; \sqrt{\det(g_{ij})}\,,$$

onde $g_{ij} = T(w_i, w_j)$ é a matriz dos produtos internos.

Solução:

(a) Defina

$$\eta\Big((a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{n1}, \ldots, a_{nn})\Big) \;:=\; \omega\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} v_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} v_j\Big)\,.$$

Como ω é um tensor alternado, temos que η é um tensor alternado de ordem n em $\mathbb{R}^n$. Portanto, η é um múltiplo do determinante, pois a dimensão do espaço vetorial dos tensores alternados de ordem n em $\mathbb{R}^n$ é igual a $\binom{n}{n} = 1$. Daí,

$$\eta \;=\; \lambda \cdot \det \tag{4}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Aplicando ambos os lados da igualdade (4) a $(e_1, \ldots, e_n)$, deduzimos que $\lambda = \omega(v_1, \ldots, v_n)$ e portanto $\omega(w_1, \ldots, w_n) = \det(a_{ij}) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_n)$.

(b) Seja $v_1, \ldots, v_n$ uma base ortornormal de V com respeito a T e com orientação μ, e defina os coeficientes a_{ij} por

$$w_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \,.$$

Pelo item anterior, sabemos que

$$\omega(w_1, \ldots, w_n) = \det(a_{ij}) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_n) = \det(a_{ij})\,, \tag{5}$$

pois a base $v_1, \ldots, v_n$ é ortonormal com orientação μ e ω é elemento de volume.

Também pelo fato da base ser ortonormal, temos que $g_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^T$. Usando novamente o item anterior, obtemos

$$\det(g_{ij}) = \det(a_{ij}) \cdot \det(a_{ij}^T) = \det(a_{ij})^2. \tag{6}$$

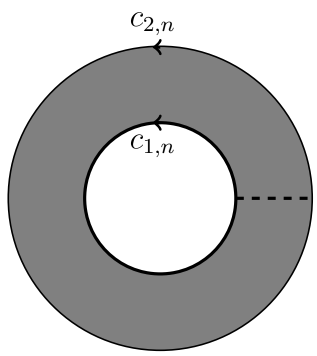
Juntando (5) e (6), obtemos o resultado.

3) Sendo $r > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, defina o cubo singular unidimensional $c_{r,n} : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ por

$$c_{r,n}(t) = \big(r\cos(2\pi nt), r\sin(2\pi nt)\big)\,.$$

Exiba um cubo singular bidimensional $c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ tal que $\partial c = c_{2,n} - c_{1,n}$.

Solução:



Defina $c(x,y) = \big((1+y)\cos(2\pi nt), (1+y)\sin(2\pi nt)\big)$ e note que $c(x,0) = c_{1,n}$ e $c(x,1) = c_{2,n}$.

4) Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ superfície compacta tridimensional orientada com fronteira, e seja F um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$. Denote $dV = dx \wedge dy \wedge dz$. Mostre que

$$\iiint_M (\nabla \cdot F)\, dV \;=\; \iint_{\partial M} F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy\,.$$

Solução: Temos que $d(F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy) = (\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}) dx \wedge dy \wedge dz$. Portanto, pelo Teorema de Stokes, vale que $\iiint_M (\nabla \cdot F)\, dV = \iint_{\partial M} F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$.