Prova 3

MAT508 - Análise no $\mathbb{R}^n$

Semestre 2023.2

Prof. Tertuliano

Prova 3 - 11/12/2023

1) Dado um campo vetorial $F = (F_1, F_2, F_3)$ em $\mathbb{R}^3$, definimos as formas

$$\begin{aligned} \omega_F^1 &= F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz \\ \omega_F^2 &= F_1\,dy \wedge dz - F_2\,dx \wedge dz + F_3\,dx \wedge dy \end{aligned}$$

(a) Defina $\nabla \times F$ como o produto vetorial (formal) de ∇ por F, nesta ordem. Mostre a partir disso que

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

(b) Seja f uma forma de ordem zero em $\mathbb{R}^3$. Mostre as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} df &= \omega_{\nabla f}^1\,, \\ d(\omega_F^1) &= \omega_{\nabla \times F}^2\,, \\ d(\omega_F^2) &= (\nabla \cdot F)\,dx \wedge dy \wedge dz\,. \end{aligned}$$

(c) Use o item anterior para mostrar que $\nabla \times (\nabla f) = 0$ e que $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$.

(d) Suponha que F é um campo vetorial sobre um aberto estrelado $A \subset \mathbb{R}^3$ e que $\nabla \times F = 0$. Mostre que existe forma f de ordem zero tal que $F = \nabla f$.

(e) Suponha que F é um campo vetorial sobre um aberto estrelado $A \subset \mathbb{R}^3$ e que $\nabla \cdot F = 0$. Mostre que existe campo vetorial G tal que $F = \nabla \times G$.

2) Seja V espaço vetorial de dimensão n.

(a) Seja $v_1, \ldots, v_n$ uma base de V. Dados os vetores $w_1, \ldots, w_n \in V$, sejam a_{ij} os coeficientes definidos por

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j\,.$$

Dado $\omega \in \Omega^n(V)$, mostre que $\omega(w_1, \ldots, \omega_n) = \det(a_{ij}) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_n)$.

(b) Sendo $\omega \in \Omega^n(V)$ o elemento de volume determinado pelo produto interno T com orientação μ, e dados $w_1, \ldots, w_n \in V$, mostre que

$$|\omega(w_1, \ldots, w_n)| = \sqrt{\det(g_{ij})}\,,$$

onde $g_{ij} = T(w_i, w_j)$ é a matriz dos produtos internos.

3) Sendo $r > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, defina o cubo singular unidimensional $c_{r,n} : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ por

$$c_{r,n}(t) = \big(r\cos(2\pi n t), r\sin(2\pi n t)\big)\,.$$

Exiba um cubo singular bidimensional $c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ tal que $\partial c = c_{2,n} - c_{1,n}$.

4) Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ superfície compacta tridimensional orientada com fronteira, e seja F um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$. Denote $dV = dx \wedge dy \wedge dz$. Mostre que

$$\iiint_M (\nabla \cdot F)\, dV \;=\; \iint_{\partial M} F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy\,.$$