Prova 2 - Gabarito
MAT508 - Análise no $\mathbb{R}^n$
Semestre 2023.2
Prof. Tertuliano
Prova 2 - 25/10/2023

1) Prove ou dê contra-exemplo:

(a) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ tem conteúdo nulo, então tem medida nula.
Verdadeiro, basta aplicar as definições.

(b) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula, então tem conteúdo nulo.
Falso, tome $\mathbb{N}$ *por exemplo.*

(c) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto não-vazio, então A não tem medida nula.
Verdadeiro. Se A é aberto não-vazio, então contém um retângulo fechado R, que provamos não ter conteúdo nulo. Como todo compacto de conteúdo nulo tem medida nula, R não pode ter medida nula, logo A não tem medida nula.

(d) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ tem interior vazio, então tem medida nula.
Falso. Tome $A = (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap [0,1]$. Como os racionais são densos, A tem interior vazio. Mas não tem medida nula: como $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ é enumerável, tem medida nula. Se A tivesse medida nula, como união de conjuntos com medida nula tem medida nula, concluiríamos que $[0,1]$ tem medida nula, o que não é verdade.

2) Para $A, B \subset \mathbb{R}^3$ mensuráveis à Jordan, defina

$$\begin{aligned} A_z &= \{(x,y) : (x,y,z) \in A\}, \\ B_z &= \{(x,y) : (x,y,z) \in B\}. \end{aligned}$$

Suponha que, para todo $z \in \mathbb{R}$, valha que A_z e B_z são mensuráveis à Jordan (em $\mathbb{R}^2$) e que tenham mesma área. Mostre que A e B têm mesmo volume.

Solução: Seja R retângulo de $\mathbb{R}^n$, com $A, B \subset R$ e $R = \tilde{R} \times [a,b]$. Para simplificar, chame $(x,y) = w$. Então

$$\begin{aligned} vol(A) &= \int_A 1 = \int_R \chi_A \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{[a,b]} \int_{\tilde{R}} \chi_A(w,z)\, dw\, dz = \int_{[a,b]} \text{area}(A_z)\, dz \\ &= \int_{[a,b]} \text{area}(B_z)\, dz = \int_{[a,b]} \int_{\tilde{R}} \chi_B(w,z)\, dw\, dz \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_R \chi_B = vol(B). \end{aligned}$$

3) Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ retângulo fechado e $f : A \to \mathbb{R}$ função limitada. Mostre que se $f : A \to \mathbb{R}$ é integrável, então

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| \,.$$

Solução: Se f é limitada, então $|f|$ é limitada. Como o conjunto dos pontos de descontinuidade de f contém o conjunto dos pontos de descontinuidade de $|f|$, concluímos que $|f|$ é integrável.

Daí,

$$U(|f|,P) = \sum_{S\in P} M_S(|f|)\,\mathrm{vol}(S) \geq \sum_{S\in P} M_S(f)\,\mathrm{vol}(S) = U(f,P)$$

e

$$U(|f|,P) = \sum_{S\in P} M_S(|f|)\,\mathrm{vol}(S) \geq \sum_{S\in P} M_S(-f)\,\mathrm{vol}(S) = -\sum_{S\in P} m_S(f)\,\mathrm{vol}(S) = -L(f,P).$$

Passando o ínfimo sobre todas as partições, temos que

$$\inf_P U(|f|,P) \geq \inf U(f,P) = \int_A f$$

e

$$\inf_P U(|f|,P) \geq \inf_P -L(f,P) = -\sup_P L(f,P) = -\int_A f,$$

que implicam que $\int_A |f| \geq \left|\int_A f\right|$.

4) Defina Partição da Unidade. Defina integral (generalizada) de uma função $f : A \to \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto (não se esqueça de colocar as hipóteses na função f).

Solução: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Temos que uma partição da unidade Φ é um conjunto de funções C^∞ que estão entre 0 e 1, somam um em cada ponto e são localmente finitas, ou seja, para cada ponto $x \in A$ existe um aberto $x \in A_x$ tal que para apenas um subconjunto finito de Φ os suportes das funções desse subconjunto intersectam A_x.

Dada $f : A \to \mathbb{R}$ localmente finita, f é dita integrável se, para alguma partição da unidade de A vale

$$\sum_{\phi\in\Phi} \int |f|\phi < \infty$$

e, nesse caso, definimos a integral como

$$\int_A f \;=\; \sum_{\phi\in\Phi} \int f\phi$$

5) Enuncie a Fórmula de Mudança de Variáveis. Mostre que se a Fórmula de Mudança de Variáveis vale para $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e para $h : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, com $g(A) \subset B$ sendo $g, h \in C^1$, então vale também para $h \circ g : A \to \mathbb{R}^n$.

Solução: Dada $f : g(A) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f integrável com A aberto e $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g \in C^1$ injetiva tal que $\det g'(x) \neq 0$ para todo $x \in A$,

$$\int_{g(A)} f \;=\; \int_A f \circ g |\det g'|.$$

Suponha que o teorema valha para g e h. Daí,

$$\begin{aligned}\int_{h(g(A))} f &= \int_{g(A)} f \circ h|\det h'| = \int_A \Big(\big(f \circ h|\det h'|\big) \circ g\Big)|\det g'| \\ &= \int_A f \circ h \circ g \left(|\det h' \circ g \cdot \det g'|\right) \overset{\text{Regra da Cadeia}}{=} \int_A f \circ h \circ g\,|\det(h \circ g)'|.\end{aligned}$$