



**Prova 2**  
MAT508 - Análise no  $\mathbb{R}^n$   
Semestre 2023.2  
Prof. Tertuliano  
Prova 2 - 25/10/2023



1) Prove ou dê contra-exemplo:

- (a) Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  tem conteúdo nulo, então têm medida nula.
- (b) Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  tem medida nula, então têm conteúdo nulo.
- (c) Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  é aberto não-vazio, então  $A$  não tem medida nula.
- (d) Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  tem interior vazio, então tem medida nula.

2) Para  $A, B \subset \mathbb{R}^3$  mensuráveis à Jordan, defina

$$A_z = \{(x, y) : (x, y, z) \in A\},$$

$$B_z = \{(x, y) : (x, y, z) \in B\}.$$

Suponha que, para todo  $z \in \mathbb{R}$ , valha que  $A_z$  e  $B_z$  são mensuráveis à Jordan (em  $\mathbb{R}^2$ ) e que tenham mesma área. Mostre que  $A$  e  $B$  têm mesmo volume.

3) Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  retângulo fechado e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  função limitada. Mostre que se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável, então

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

- 4) Defina Partição da Unidade. Defina integral (generalizada) de uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $A \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto (não se esqueça de colocar as hipóteses na função  $f$ ).
- 5) Enuncie a Fórmula de Mudança de Variáveis. Mostre que se a Fórmula de Mudança de Variáveis vale para  $g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e para  $h : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $g(A) \subset B$  sendo  $g, h \in C^1$ , então vale também para  $h \circ g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ .