Prova 1 - 2ª chamada
Gabarito Resumido
MAT508 - Análise no $\mathbb{R}^n$
Semestre 2023.2
Prof. Tertuliano
Data 13/12/2023

1) Dizemos que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preserva norma (euclidiana) se $\|T(x)\| = \|x\|$ e dizemos que preserva produto interno se $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

   (a) Mostre que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preserva norma se, e somente se, preserva produto interno.

   (b) Mostre que uma transformação linear assim é necessariamente bijetiva e que o mesmo vale para T^{-1} (também preserva norma e produto interno).

   Solução:

   (a) Identidade de polarização.

   (b) Como $\|T(x)\| = \|x\|$, o núcleo de T é $\{0\}$, logo é bijetiva. Trocando x por $T^{-1}y$, obtemos $\|T(T^{-1}y)\| = \|T^{-1}y\|$ e T^{-1} também preserva norma.

2) Seja $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ transformação linear e $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \langle x, Gy\rangle$. Calcule $f'(x, y)$.

   Solução: Temos que

$$
\begin{aligned}
f(x+u, y+v) &= \langle x+u, G(y+v)\rangle \\
&= \langle x, G(y)\rangle + \langle u, G(y)\rangle + \langle x, G(v)\rangle + \langle u, G(v)\rangle \\
&= f(x, y) + T(u, v) + r(u, v)
\end{aligned}
$$

   onde $T(u, v) = \langle u, G(y)\rangle + \langle x, G(v)\rangle$ é linear e $\lim_{(u,v)\to 0} \frac{r(u,v)}{\|(u,v)\|} = 0$ pois G é contínua. Logo $f'(x, y)(u, v) = \langle u, G(y)\rangle + \langle x, G(v)\rangle$.

3) Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ função C^1 tal que $\det f'(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. Mostre que f é função aberta, ou seja, se $A \subset U$ é aberto, então $f(A)$ é aberto.

   Solução: Seja A aberto. Pelo Teorema da Função Inversa, para todo $x_0 \in A$, existem abertos $V_{x_0} \subset A$ e W_{x_0} tais que $f : V_{x_0} \to W_{x_0}$ é difeomorfismo local. Portanto, $f(V_{x_0}) = W_{x_0}$. Daí,

$$
f(A) = f\Big(\bigcup_{x_0 \in A} V_{x_0}\Big) = \bigcup_{x_0 \in A} f(V_{x_0}) = \bigcup_{x_0 \in A} W_{x_0}
$$

   que é aberto, pois união arbitrária de abertos é aberto.

4) Mostre que uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$, não pode ser injetiva. **Dica:** se $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ em todos os pontos, conclua que f não pode ser injetiva. E se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ para algum ponto (x_0, y_0), mostre que f também não pode ser injetiva.

Solução: Se $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ em todos os pontos, então $f(x_0, y)$ é constante em y para todo x_0 fixo, logo não é injetiva. Se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ para algum ponto (x_0, y_0), pelo Teorema da Função Implícita, existem intervalos abertos $U \ni x_0$ e $V \ni y_0$ e uma função $g : U \to V$ tal que $f(x, g(x)) = c$. Logo f não pode ser injetiva, pois existirão $(x_1, g(x_1)) \neq (x_2, g(x_2))$ tais que $f((x_1, g(x_1))) = f((x_2, g(x_2)))$.