**Prova 1 - 2ª chamada**
MAT508 - Análise no $\mathbb{R}^n$
Semestre 2023.2
Prof. Tertuliano
Data 13/12/2023

1) Dizemos que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preserva norma (euclidiana) se $\|T(x)\| = \|x\|$ e dizemos que preserva produto interno se $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

   (a) Mostre que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preserva norma se, e somente se, preserva produto interno.

   (b) Mostre que uma transformação linear assim é necessariamente bijetiva e que o mesmo vale para $T^{-1}$ (também preserva norma e produto interno).

2) Seja $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ transformação linear e $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \langle x, Gy\rangle$. Calcule $f'(x, y)$.

3) Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ função $C^1$ tal que $\det f'(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. Mostre que $f$ é função aberta, ou seja, se $A \subset U$ é aberto, então $f(A)$ é aberto.

4) Mostre que uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$, não pode ser injetiva. **Dica:** se $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ em todos os pontos, conclua que $f$ não pode ser injetiva. E se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ para algum ponto $(x_0, y_0)$, mostre que $f$ também não pode ser injetiva.