Prova 1
MAT508 - Análise no $\mathbb{R}^n$
Semestre 2023.2
Prof. Tertuliano
Prova I - 18/09/2023

1) *Seja $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que K é compacto então K é limitado e fechado (assuma as definições topológicas de aberto, fechado e compacto).*

Façamos a prova por contrapositiva. Suponha que K não é limitado ou K não é fechado.

Se K não é limitado, fora de toda bola $B(0,n)$ existe um ponto $x_n \notin B(0,n)$. Daí, $\{B(0,n) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura aberta de K que não admite subcobertura finita.

Se K não é fechado, seu complementar $K^{\complement}$ não é aberto, ou seja, existe um ponto $x \in K^{\complement}$ tal que x não é interior, ou seja, toda bola de centro em x possui pontos de K. Daí, a cobertura aberta $\{B[x, \frac{1}{n}]^{\complement} : n \in \mathbb{N}\}$ de K não admite subcobertura finita.

2) *Sejam U aberto, e $R : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$, $S : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ funções diferenciáveis. Defina $\phi : U \to \mathbb{R}^p$ por $\phi(x) = R(x) \circ S(x) \circ f(x)$. Calcule $\phi'(x) \cdot h$.*

Temos que

$$\begin{aligned}
\phi(x+h) &= R(x+h) \circ S(x+h) \circ f(x+h) \\
&= \big(R'(x)h + r_1(h)\big)\big(S'(x)h + r_2(h)\big)\big(f'(x)h + r_3(h)\big) \\
&= \big(R'(x)h\big) \circ S(x) f(x) + R(x)\big(S'(x)h\big) f(x) + R(x)S(x)\big(f'(x)h\big) + \text{ resto}.
\end{aligned}$$

3) *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ função C^1 tal que $\det f'(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. Mostre que f é função aberta, ou seja, se $A \subset U$ é aberto, então $f(A)$ é aberto.*

Seja A aberto. Pelo Teorema da Função Inversa, para todo $x_0 \in A$, existem abertos $V_{x_0} \subset A$ e W_{x_0} tais que $f : V_{x_0} \to W_{x_0}$ é difeomorfismo local. Portanto, $f(V_{x_0}) = W_{x_0}$. Daí,

$$f(A) = f\Big(\bigcup_{x_0 \in A} V_{x_0}\Big) = \bigcup_{x_0 \in A} f(V_{x_0}) = \bigcup_{x_0 \in A} W_{x_0}$$

que é aberto, pois união arbitrária de abertos é aberto.

4) *Utilize a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ para mostrar que a hipótese $f \in C^1$ não pode ser (completamente) descartada do enunciado do Teorema da Função Inversa.*

Note que $f'(0) \neq 0$. Considere a sequência $x_n = \frac{1}{2n\pi}$. Vale que $f'(x_n) < 0$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, o que implica que f não é localmente injetiva em torno de zero, logo não pode valer a conclusão do Teorema da Função Inversa a respeito de f ser difeomorfismo local (em torno de zero).

5) *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $f : U \to \mathbb{R}$ *função diferenciável no ponto* $a \in U$. *Mostre que existem pelo menos* $n-1$ *vetores linearmente independentes tais que* $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$.

Como f é diferenciável, $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle$, que é um funcional linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ (em v). Pelo Teorema do Núcleo-Imagem, a dimensão do núcleo é pelo menos $n-1$.