Prova 1
MAT508 - Análise no $\mathbb{R}^n$
Semestre 2023.2
Prof. Tertuliano
Prova 1 - 18/09/2023

1) Seja $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que K é compacto então K é limitado e fechado (assuma as definições topológicas de aberto, fechado e compacto).

2) Sejam U aberto, e $R : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$, $S : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ funções diferenciáveis. Defina $\phi : U \to \mathbb{R}^p$ por $\phi(x) = R(x) \circ S(x) \circ f(x)$. Calcule $\phi'(x) \cdot h$.

3) Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ função C^1 tal que $\det f'(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. Mostre que f é função aberta, ou seja, se $A \subset U$ é aberto, então $f(A)$ é aberto.

4) Utilize a função$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ para mostrar que a hipótese $f \in C^1$ não pode ser (completamente) descartada do enunciado do Teorema da Função Inversa.

5) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ função diferenciável no ponto $a \in U$. Mostre que existem pelo menos $n-1$ vetores linearmente independentes tais que $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$.