Prova II - MATA42 2022.2
Gabarito
Intro. Matemática Discreta I
Prof.: Tertuliano Franco
Data: 06/12/2022

Instruções: Interpretação do enunciado faz parte da avaliação. Pode-se dar respostas em termos de fatoriais. Não é permitido o uso de calculadoras nem celulares. Respostas sem justificativa não serão aceitas. Cada questão vale 2,0 pontos.

Nome:____

(1) Classifique a relação $\mathcal{R}$ em $X = \{1,2,3,4\}$ dada por $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,2),(3,4),(4,3)\}$.

Solução:

Não é reflexiva, pois $(1,1) \notin \mathcal{R}$.

Não é antirreflexiva, pois $(2,2) \in \mathcal{R}$.

Não é simétrica, pois $(1,2) \in \mathcal{R}$ mas $(2,1) \notin \mathcal{R}$.

Não é antissimétrica, pois $(3,4) \in \mathcal{R}$ e $(4,3) \in \mathcal{R}$.

Não é transitiva, pois $(3,4) \in \mathcal{R}$ e $(4,3) \in \mathcal{R}$, mas $(3,3) \notin \mathcal{R}$.

Não é de equivalência, pois precisaria ser reflexiva, simétrica e de equivalência.

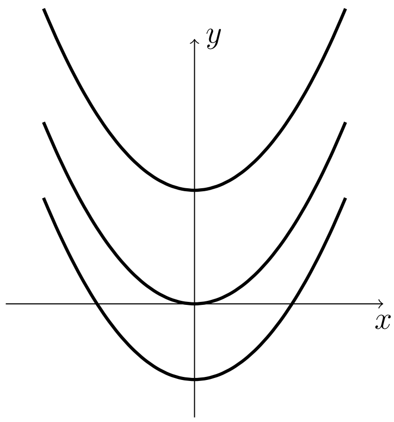
(2) Mostre que a relação $\mathcal{R}$ em $\mathbb{R}^2$ dada por $(x_0,y_0) \sim (x_1,y_1)$ se $y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$ é uma relação de equivalência e descreva suas classes de equivalência.

Solução: Como $y_0 - x_0^2 = y_0 - x_0^2$, temos que $(x_0,y_0) \sim (x_0,y_0)$, logo é reflexiva.

Sejam $(x_0,y_0) \sim (x_1,y_1)$. Daí $y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$, que implica $y_1 - x_1^2 = y_0 - x_0^2$ e portanto $(x_1,y_1) \sim (x_0,y_0)$, logo é simétrica.

Sejam $(x_0,y_0) \sim (x_1,y_1)$ e $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$. Logo, $y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$ e $y_1 - x_1^2 = y_2 - x_2^2$, o que implica em $y_0 - x_0^2 = y_2 - x_2^2$. Daí, $(x_0,y_0) \sim (x_2,y_2)$, de onde deduzimos que a relação é transitiva.

Como é reflexiva, simétrica e transitiva, é de equivalência. Suas classes de equivalência são parábolas disjuntas, veja a figura abaixo.



(3) De quantas maneiras podemos pintar uma roleta de 10 compartimentos se temos n cores disponíveis e podemos repetir cores?

Solução:

$$\frac{n}{1} + \frac{n^2 - n}{2} + \frac{n^5 - n}{5} + \frac{n^{10} - (n^2 - n) - (n^5 - n)}{10}$$

(4) Uma faixa horizontal $1 \times n$ será completamente coberta por azulejos, que podem ter dois formatos retangulares, 1×1 ou 1×2. Cada azulejo 1×1 pode ser cinza ou branco, e cada azulejo 1×2 pode ser do tipo pontilhado, quadriculado ou preenchido com retas inclinadas. A Figura 1 ilustra uma possível maneira de cobrir a faixa horizontal. Encontre a_n, o número de maneiras de cobrir a faixa horizontal.

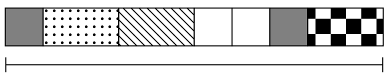


Figura 1: Exemplo de cobertura

Solução:

Recorrência:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad \forall\, n \geq 2, \\ a_0 = 1, \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

Usando o método da equação característica, obtemos

$$a_n \;=\; \frac{3}{4}3^n + \frac{1}{4}(-1)^n\,.$$

(5) Defina conjunto finito, infinito enumerável e infinito não-enumerável. Exiba uma bijeção para mostrar que o conjunto dos inteiros divisíveis por 3 é enumerável.

Solução: Um conjunto A é finito se $A = \varnothing$ ou existe bijeção $f : A \to \{1, \ldots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Um conjunto A é infinito enumerável se existe bijeção $f : A \to \mathbb{N}$.

Um conjunto A é infinito não-enumerável se é infinito mas não existe bijeção $f : A \to \mathbb{N}$.

Para mostrar que os múltiplos de 3 são enumeráveis, basta considerar a bijeção $f(n) = 3n$, $f : \mathbb{N} \to \{\ldots, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$.

(6) **(Extra: 2pt)** Este exercício é inspirado na Máquina de Turing.

(a) Argumente porque o conjunto dos programas de computador que podemos escrever é infinito enumerável.

(b) Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pode ser entendida como um *problema* em computação. Por exemplo, podemos associar a função $f(n) = n^2$ a um programa que receba como *input* o número natural n e imprima n^2 na tela. Mostre que o conjunto dos problemas em computação é não-enumerável.

(c) Conclua que existe uma quantidade não-enumerável de problemas não-solucionáveis em computação.

Solução:

a) Um programa de computador pode arbitrariamente grande, mas é finito. Como união enumerável de enumeráveis é enumerável, concluímos que o conjuntos dos programas é enumerável.

b) Note que o conjunto das funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ corresponde ao conjunto $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Daí, basta usar a Diagonal de Cantor ou argumentar que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ contém $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, que vimos em aula ser não-enumerável.

c) Os problemas podem ser solucionáveis ou não solucionáveis. Os solucionáveis são solucionados por algum programa, logo são enumeráveis. Se os não-solucionáveis fossem enumeráveis, então o conjunto dos problemas seria enumerável. Mas sabemos que não é, pelo item anterior.