



Prova I - MATB31 2022.2  
Intro. Análise Combinatória  
Prof.: Tertuliano Franco  
Data: 18/10/2022



**Instruções:** Interpretação do enunciado faz parte da avaliação. Pode-se dar respostas em termos de fatoriais. Não é permitido o uso de calculadoras nem celulares. Respostas sem justificativa não serão aceitas. Cada questão vale 2,0 pontos.

**Nome:** \_\_\_\_\_

- (1) Numa mesa redonda, sentam-se ao acaso  $n$  meninos e  $k$  meninas. Qual a probabilidade de que não haja meninas sentadas consecutivamente?
- (2) Sejam  $k \geq n$  naturais. De quantas maneiras podemos compor uma caixa de bombons se há  $n$  tipos diferentes de bombons disponíveis, e a caixa deve conter  $k$  bombons, com pelo menos um bombom de cada tipo?
- (3) De quantas maneiras podemos pintar os compartimentos de uma roleta de 6 compartimentos se temos  $n$  cores disponíveis e podemos repetir cores?
- (4) Prove, por um argumento combinatório, que

$$\binom{A+B+C}{p} = \sum_{k=0}^p \sum_{\ell=0}^{p-k} \binom{A}{k} \binom{B}{\ell} \binom{C}{p-\ell-k}.$$

- (5) Há 12 estudantes no curso de Combinatória. Ao longo do curso, os estudantes formam duplas para estudarem juntos, que são eventualmente desfeitas para que novas duplas sejam formadas. Prove que sempre existem dois estudantes tais que há pelo menos cinco outros estudantes que já fizeram duplas com ambos ou com nenhum dos dois.

**Dica:** Use contagem dupla. Primeiro mostre que o número de pares que você quer contar é maior ou igual a  $\binom{12}{2} \cdot (10 - 4)$ . Depois mostre que o número de pares que você quer contar é menor ou igual a  $12 \max_{0 \leq d \leq 11} d(11 - d)$ .