Prova 3
Limites e Derivadas
MATB33 2019.2
Prof. Tertuliano Franco
Data 02/12/2019

1ª	
2ª	
3ª	
4ª	
5ª	

Gabarito Resumido

1. **(5pt)** Esboce o gráfico de

   (a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$. (b) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

   (a) Domínio: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ e

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2(xe^x - e^x)' - 2x(xe^x - e^x)}{x^4} \\ &= \frac{x^2(xe^x - e^x)' - 2x(xe^x - e^x)}{x^4} \end{aligned}$$

   (b) Domínio: $\mathbb{R}$. $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2-1)$ e $f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x^2(2x-1)$.

2. **(2pt)** Calcule

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0^+} \sin x \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\text{cossec}\, x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\text{cossec}\, x\ \text{cotg}\, x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\text{tg}\, x}{x\ \text{cossec}\, x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\text{sen}^2\, x}{x\ \cos x} = 0\,.$$

$$\text{(b)}\ \lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{4x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{4e^{4x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{4^2 e^{4x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{4^3 e^{4x}} = 0\,.$$

3. **(2pt)** Seja $0 < \alpha < 1$. Mostre que $-x^\alpha + \alpha x + 1 - \alpha \geq 0$ para todo $x \geq 0$.

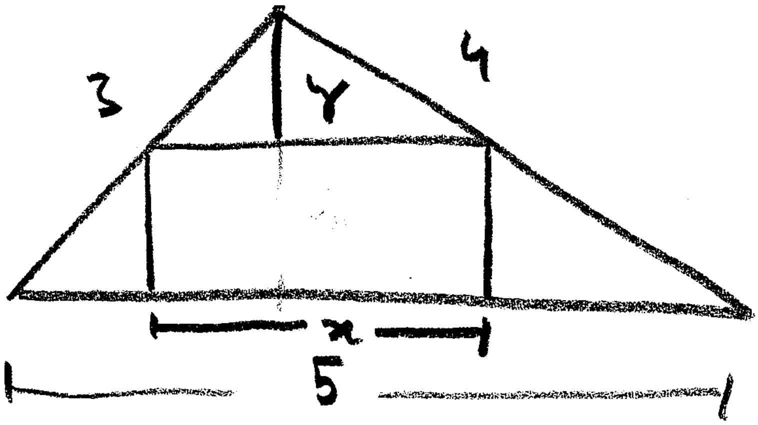
   Seja $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^\alpha + \alpha x + 1 - \alpha$. Temos que $f'(x) = -\alpha x^{\alpha-1} + \alpha$. Como $f'(x) \leq 0$ para $x \leq 1$ e $f'(x) \geq 0$ para $x \geq 1$, temos que $x = 1$ é mínimo global. Logo, $f(x) \geq f(1)$, ou seja,

$$-x^\alpha + \alpha x + 1 - \alpha \geq f(1) = 0.$$

4. **(1pt)** Enuncie o Teorema do Valor Médio e explique seu significado.

5. **(2pt-extra)** Dado o triângulo retângulo de lados 3 e 4, determine o retângulo de maior área nele inscrito, de modo que um dos lados do retângulo esteja contido na hipotenusa do triângulo.

   Seja h a altura do triângulo. Como o triângulo é retângulo, $3 \cdot 4 = 5h$, logo $h = 12/5$. Seja x o comprimento da base do retângulo (sobre a hipotenusa), e h o comprimento da altura do retângulo. Por semelhança de triângulos, $h = \dfrac{12}{5} - \dfrac{12x}{25}$. Daí, a área do triângulo é $A(x) = \frac{12x}{5}\left(1 - \frac{x}{5}\right)$ cujo valor mínimo é $A(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2} \cdot \frac{12}{5}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 3$.



$$5h = 3 \cdot 4 \Rightarrow h = \frac{12}{5}$$

$$\frac{y}{h} = \frac{x}{5} \Rightarrow y = \frac{xh}{5}$$

$$A = x(h-y) = x\left(\frac{12}{5} - x\frac{12}{25}\right)$$

$$= x\frac{12}{5}\left(1 - \frac{x}{5}\right.$$