Prova 2
Limites e Derivadas
MATB33 2019.2
Prof. Tertuliano Franco
Data 16/10/2019

1ª	
2ª	
3ª	
4ª	
5ª	

Gabarito Resumido

1. Calcule a derivada de

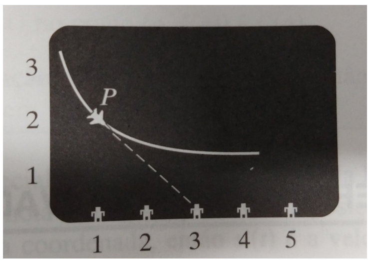
   (a) $f(x) = \sin\left(e^{(x^2-4x+7)} \cdot \left(\dfrac{x^2+1}{3x+2}\right)\right)$ (b) $f(x) = (x^2+2)^{\cos(x+\pi/3)}$

   Solução:

   $$\text{(a) } f'(x) = \cos\left(e^{(x^2-4x+7)} \cdot \left(\frac{x^2+1}{3x+2}\right)\right) \cdot \left[(2x-4)e^{(x^2-4x+7)}\left(\frac{x^2+1}{3x+2}\right) + e^{(x^2-4x+7)} \cdot \frac{(3x+2)2x-(x^2+1)3}{(3x+2)^2}\right]$$

   $$\text{(b) } f'(x) = \left[\exp\left\{\log(x^2+2)^{\cos(x+\pi/3)}\right\}\right]'$$
   $$= \left[\exp\left\{\cos(x+\pi/3)\log(x^2+2)\right\}\right]'$$
   $$= \exp\left\{\cos(x+\pi/3)\log(x^2+2)\right\}\Big(-\sin(x+\pi/3)\log(x^2+2) + \cos(x+\pi/3)\frac{2x}{x^2+1}\Big)$$

2. No videogame da figura, os aviões voam da esquerda para a direita segundo a trajetória $y = 1 + \frac{1}{x}$, e podem disparar suas balas na direção da tangente contra alienígenas ao longo do eixo x em $x = 1, 2, 3$ e 4. Determine se algum alienígena será atingido se o avião disparar um projétil quando estiver no ponto $(1, 2)$.

   Solução: A equação da reta tangente é $y = f(p) + f'(p)(x-p)$. Como $f'(x) = -1/x^2$, temos que $y = 2-(x-1)$, ou seja, a equação da reta tangente ao gráfico em $(1,2)$ é $y = 3-x$. Quando $y = 0$, temos que $x = 3$. Portanto, o alienígena em $x = 3$ será atingido.

3. Mostre, de pelo menos duas maneiras diferentes, que a derivada de $f(x) = \cot x$ é $f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$.

Solução:

1ª maneira: Usar a definição de derivada e o limite trigonométrico fundamental.

$$\begin{aligned}\Big(\cot x\Big)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cot(x+h)-\cot(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)}-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin(x+h)\sin(x)}\cdot\frac{\cos(x+h)\sin(x)-\cos(x)\sin(x+h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin(x+h)\sin(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-\sin\big((x+h)-x\big)}{h} = -\operatorname{cosec}^2(x)\end{aligned}$$

2ª maneira: Usar a derivada do quociente.

$$\begin{aligned}\Big(\cot x\Big)' = \Big(\frac{\cos x}{\sin x}\Big)' &= \frac{(\sin x)(\cos x)' - (\cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x}\\ &= \frac{-(\sin x)^2-(\cos x)^2}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2(x)\,.\end{aligned}$$

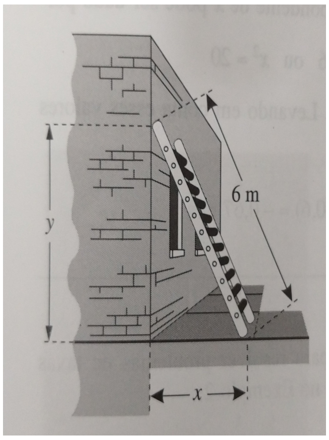
3ª maneira: Usar a regra do produto e a regra da cadeia.

$$\begin{aligned}\Big(\cot x\Big)' = \Big(\cos x\cdot\frac{1}{\sin x}\Big)' &= (\cos x)'\cdot\frac{1}{\sin x} + \cos x\cdot\Big((\sin x)^{-1}\Big)'\\ &= -1 + \cos x\cdot(-1)(\sin x)^{-2}\cdot\cos x = -\operatorname{cosec}^2(x)\,.\end{aligned}$$

4ª maneira: Usar a derivada da tangente e o fato da cotangente ser o inverso da tangente.

$$\Big(\cot x\Big)' = \Big(\frac{1}{\tan x}\Big)' = -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\operatorname{cosec}^2(x)\,.$$

4. Uma escada de 6 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. A base da escada começa então a deslizar horizontalmente, a uma razão de $0{,}6$ m/s. Com que velocidade o topo da escada percorrerá a parede quando estiver a 4 m do solo?



Solução: Por Pitágoras, $6^2 = x(t)^2 + y(t)^2$. Logo, quando $y(t_0) = 4$, teremos que $x(t_0) = \sqrt{20}$. Derivando a equação e usando a Regra da Cadeia, temos que $0 = 2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t)$. Logo, $0 = 2 \cdot \sqrt{20} \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 4 \cdot y'(t_0)$, de onde obtemos $y'(t_0) = -\frac{1}{4} \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{20} = -0{,}3 \cdot \sqrt{5}$.

5. Use diferencial para achar um valor aproximado de $\sqrt{8,999}$.

   Solução: Sejam $x_1 = 8,999$, $x_0 = 9$ e $f(x) = \sqrt{x}$. Daí, como $y(x_1) \approx y(x_0) + \frac{dy}{dx}(x_0)(x_1 - x_0)$, obtemos $y(x_1) \approx \sqrt{9} + \frac{(-1)}{2\sqrt{9}}(8{,}999 - 9) = 3 - \frac{0{,}001}{6}$.