Prova 1 - MATB31 2019.2
Intro. Análise Combinatória
Prof.: T. Franco / D. Erhard
Duração: 2h. Data 08/10/2019

Gabarito Resumido

(1) Seja p inteiro, $p \geq 1$. Mostre que a relação $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : p \text{ divide } y - x\}$ é uma relação de equivalência.

Solução: Como $p|x-x=0$, temos que $(x,x) \in \mathcal{R}$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, logo a relação é reflexiva. Se $(x,y) \in \mathcal{R}$, então $y - x = kp \Rightarrow x - y = (-k)p \Rightarrow (y,x) \in \mathcal{R}$, logo a relação é simétrica. Se $(x,y) \in \mathcal{R}$ e $(y,z) \in \mathcal{R}$, então $y - x = k_1 p$ e $z - y = k_2 p$. Somando as equações, $z - x = (k_1 + k_2)p$, logo $(x,z) \in \mathcal{R}$ e portanto a relação é transitiva.

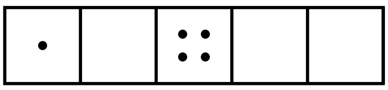
(2) De quantas maneiras podemos colocar pessoas $\{1, \dots, 20\}$ em uma mesa redonda de modo que as pessoas $\{1,2,3,4\}$ sejam sempre consecutivas em alguma ordem e que as pessoas 5 e 6 não sejam vizinhas?

Solução: Total de maneiras tais que $\{1,2,3,4\}$ são vizinhos: $\dfrac{17!}{17} \cdot 4!$. Total de maneiras tais que $\{1,2,3,4\}$ são vizinhos e $\{5,6\}$ são vizinhos: $\dfrac{16!}{16} \cdot 4! \cdot 2!$. Total de maneiras tais que $\{1,2,3,4\}$ são vizinhos e $\{5,6\}$ não são vizinhos: a diferença dos anteriores, ou seja: $\dfrac{17!}{17} \cdot 4! - \dfrac{16!}{16} \cdot 4! \cdot 2!$.

(3) De quantas maneiras podemos pintar as faces de um cubo com seis cores distintas, sem repetir cores?

Solução: Se as faces fossem numeradas, a resposta seria $6!$. Como cada classe de equivalência tem 6×4 elementos, a resposta é $\dfrac{6!}{6 \cdot 4}$.

(4) Um certo jogo de *pentaminó* usa peças retangulares com cinco números representados, que variam de 0 a 6 (veja figura abaixo). Quantas são as peças deste jogo?



Solução: Que pertencem a classes de equivalência de tamanho 1, temos 7^3 elementos, que são os elementos da forma abaixo:

a	b	c	b	a

Todos os demais pertencem a classes de equivalência de tamanho dois. Logo, temos como resposta $\dfrac{7^3}{1} + \dfrac{7^5 - 7^3}{2}$.

(5) Prove a identidade

$$\sum_{k=1}^{p-1} k(p-k)\binom{B}{k}\binom{V}{p-k} = BV\binom{B+V-2}{p-2}$$

via um argumento combinatório.

Solução: Conte o número de comissões com p pessoas escolhidas num grupo de $B+V$ pessoas, onde B pessoas torcem para o Bahia e V torcem para o Vitória, e na comissão, há dois cargos especiais: conselheiro e tesoureiro, digamos, sendo que o conselheiro tem que ser do Bahia e o tesoureiro tem que ser do Vitória.

(6) **(Extra 2pt)** Considere os algarismos indo-arábicos de 0 a 9, escritos com a grafia abaixo.

Uma placa retangular com um número de cinco algarismos com a grafia acima caiu do poste (o número pode ter zeros à esquerda, por exemplo 00001). Qual a probabilidade de que você possa dizer, com total segurança, qual era o número na placa?

Solução: O número total de casos é igual à quantidade de números de 00000 a 99999, que nos dá 100000.

Os dígitos que são invariantes por uma rotação de $180°$ são $0, 1, 2, 5, 8$.

Os dígitos que são transformados um no outro por uma rotação de $180°$ é o par 6 e 9.

Os demais, 3, 4 e 7, não são transformados em um dígito válido (ou seja, a presença de qualquer um deles na placa já nos indica a maneira correta de ler a placa).

Só não é possível dizer com segurança qual era o número no poste quando o número na placa, ao ser rotacionado de $180°$, é levado em outro número válido diferente dele. Por exemplo, 00001 é levado em 10000. O total de números que são levados em outro número válido (igual a ele ou não) é 7^5, pois são aqueles que usam os dígitos $\{0, 1, 2, 5, 6, 8, 9\}$. Vamos calcular o total de números invariantes. Para o número ser invariante, ele deve ser da forma $ABCDE$, onde:

- $C \in \{0, 1, 2, 5, 8\}$.
- $B = D \in \{0, 1, 2, 5, 8\}$ ou $(B, D) = (6, 9)$ ou $(B, D) = (9, 6)$.
- $A = E \in \{0, 1, 2, 5, 8\}$ ou $(A, E) = (6, 9)$ ou $(A, E) = (9, 6)$.

Assim, a quantidade de invariantes é $5 \cdot 7 \cdot 7$. Daí, o total de números que são transformados, por uma rotação de $180°$ em um número válido diferente dele, é igual a $7^5 - 5 \cdot 7 \cdot 7$, e temos como resposta final

$$\frac{7^5 - 5 \cdot 7 \cdot 7}{100000}.$$