Prova 1
Probabilidade - MAT562 2019.1
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 2h. Data 07/05/2019

1) Sejam F a função de distribuição de alguma variável aleatória X. Mostre que $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ e $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 1$.

2) Para $\alpha > 0$, considere a função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^\alpha}\,, & \text{se } x \geq 2\,, \\ \dfrac{1}{2}\Big(1 - \dfrac{1}{2^\alpha}\Big)\,, & \text{se } 0 \leq x < 2\,, \\ 0\,, & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Sendo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d com função de distribuição F, calcule

(a) $\mathbb{E}\big[X_1\big]$.

(b) A função de distribuição de $\max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

3) Sejam X, Y independentes com distribuição $\exp(\lambda)$, com $\lambda > 0$. Mostre que $\frac{X}{X+Y} \sim U[0,1]$.

4) **[Integração Monte Carlo]** Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ função contínua. Sejam $U_1, U_2, \ldots$ i.i.d uniformes em $[0,1]$ e defina

$$I_n = \frac{f(U_1) + \cdots + f(U_n)}{n}\,.$$

(a) Mostre que $I_n \to \int_0^1 f(x)dx$ em probabilidade.

(b) Qual a utilidade prática do resultado anterior?

5) **(extra 2pt)** Sejam X_1, X_2,... variáveis aleatórias i.i.d limitadas, ou seja, $|X_i| \leq c$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Seja $\varepsilon > 0$. Mostre que para todo $\lambda > 0$,

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}\big[\tfrac{S_n}{n} \geq \varepsilon\big] \leq -\lambda\varepsilon + \log \mathbb{E}\big[e^{\lambda X_1}\big]\,.$$

Para que serve este resultado? Sugestão: veja a questão anterior.