Prova 1
Mat. Discreta
MATA42 2018.1
Prof. Tertuliano Franco
Data 05/06/2018

1ª	
2ª	
3ª	
4ª	
5ª	

Instruções: justifique suas respostas. Cada questão vale dois pontos. Duração: 1h50. A prova pode ser feita à lápis.

Nome do aluno: ______________________________

1ª) Sejam A e B dois conjuntos. Prove ou refute que $2^{A\cup B} = 2^A \cup 2^B$.

Solução: a afirmação é falsa. Como um possível contra-exemplo, considere $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. Logo, os conjunto das partes são $2^A = \{\varnothing, \{1\}\}$, $2^B = \{\varnothing, \{2\}\}$ e $2^{A\cup B} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Portanto, neste caso, temos que

$$2^A \cup 2^B \;=\; \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\} \;\neq\; \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \;=\; 2^{A\cup B}\,.$$

2ª) Classifique a expressão booleana $\Big((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)\Big) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$ como contradição, tautologia ou nenhum dos dois.

Solução: Tautologia. Basta construir a tabela verdadeiro-falso e verificar que o valor lógico de $\Big((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)\Big) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$ é verdade, independente dos valores lógicos de x, y, z.

3ª) Calcule $\displaystyle\prod_{k=1}^{1000} \frac{(2k+1)}{(2k-1)}$.

Solução:

$$\prod_{k=1}^{1000} \frac{(2k+1)}{(2k-1)} \;=\; \frac{3}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{5}\cdots\frac{997}{995}\cdot\frac{999}{997}\cdot\frac{2001}{999} \;=\; \frac{2001}{1} \;=\; 2001.$$

4ª) Prove que a diferença simétrica de dois conjuntos é uma operação associativa.

Solução: A diferença simétrica de dois conjuntos quaisquer A e B é dada por

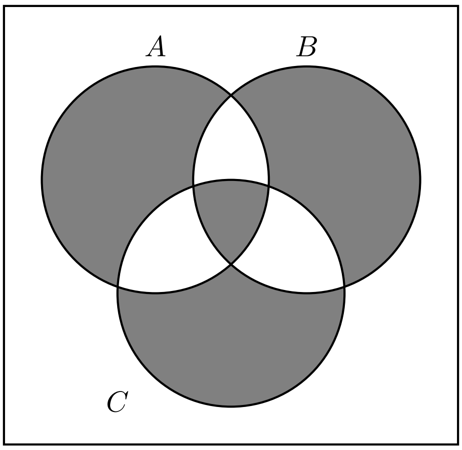
$$A\Delta B \;=\; (A\cap B^{\complement})\cup(A^{\complement}\cap B)\,.$$

Observação: há várias definições equivalentes, qualquer uma delas seria aceita na solução.

Seja uma operação $*$ que atua sobre pares de elementos. Dizemos que $*$ é associativa se, dados quaisquer três elementos a,b,c temos que $(a*b)*c = a*(b*c)$. Ou seja, a questão pede para mostrar que, dados três conjuntos quaisquer A, B e C, vale

$$(A\Delta B)\Delta C \;=\; A\Delta(B\Delta C)\,.$$

Há vários modos de mostrar isso. A ideia básica é mostrar que $(A\Delta B)\Delta C$ e $A\Delta(B\Delta C)$ são ambos dados pela região em cinza da figura abaixo.



5ª) Prove, por um argumento combinatório, que

$$2\cdot 3^0+2\cdot 3^1+2\cdot 3^2+\cdots+2\cdot 3^{n-1} \;=\; 3^n-1\,.$$

Solução: Vamos contar o número de n-uplas $(a_1,\ldots,a_n)$ cujas entradas pertencem ao conjunto $\{0,1,2\}$ tais que algum entrada é diferente de 0. Pela Regra do Produto, o total de n-uplas ternárias é 3^n, logo o número de n-uplas ternárias com alguma entrada diferente de 0 é 3^n-1.

Seja agora A_k o conjunto das n-uplas ternárias tais que a k-ésima entrada é diferente de 0 e todas as entradas anteriores são nulas. Pela Regra da Soma,

$$|A_1|+|A_2|+|A_3|+\cdots+|A_n| \;=\; 3^n-1\,.$$

Além disso, $|A_k| = 2\cdot 3^{n-k-1}$ pois na k-ésima entrada há duas possibilidades, e nas entradas à direita da k-ésima entrada há 3^{n-k-1} possibilidades. Assim,

$$2\cdot 3^{n-1}+\cdots+2\cdot 3^2+2\cdot 3^1+2\cdot 3^0 \;=\; 3^n-1\,.$$