Prova 1 - MATB31 2016.1
Intro. Análise Combinatória
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 2h. Data 05/06/2018

Instruções: Interpretação do enunciado faz parte da avaliação. Não serão tiradas dúvidas durante a prova. Pode-se dar respostas em termos de fatoriais. Não é permitido o uso de calculadoras. Respostas sem justificativa não serão aceitas. Cada questão vale 2,0 pontos.

Gabarito Resumido:

(1) Seja X um conjunto com n elementos. Quantas são as relações $\mathcal{R}$ em X que são antirreflexivas e antissimétricas?

Resposta: Não há laço, e entre dois vértices x e y, podemos ter uma seta de x para y, ou uma seta de y para x, ou nenhuma seta. Logo, há três possibilidades para cada par de vértices. Daí, pela Regra do Produto, a resposta é dada por $3^{\binom{n}{2}}$.

(2) De quantas maneiras podemos colocar 15 pessoas em uma mesa redonda de modo que certas quatro pessoas sejam sempre consecutivas em alguma ordem?

Resposta: Consideremos primeiro estas quatro pessoas como um único objeto (pois estarão sempre consecutivas em alguma ordem). Daí, teríamos uma permutação circular de 12 pessoas, que dá $\frac{12!}{12} = 11!$. Mas ainda temos de contar as possíveis ordens das quatro pessoas que estão sempre juntas, que são $4!$. Daí, temos como resposta $11! \cdot 4!$.

(3) Uma fábrica produz 10 tipos de balas. Um saco de balas vem com pelo menos 20 balas, e no máximo 30 balas. Quantos sacos de balas diferentes existem?

Resposta: Basta contar quantos são os sacos com até 30 balas e subtrair o número de sacos com até 19 balas. O número de sacos com até 30 balas é dado pelo número de soluções em inteiros não-negativos de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} \; = \; k\,, \text{ com } 0 \leq k \leq 30\,,$$

que é o mesmo que

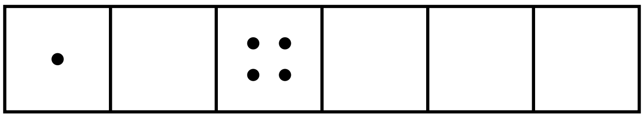
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} + (30 - k) \; = \; 30\,, \text{ com } 0 \leq k \leq 30\,.$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = 30 - k$, temos que o número de soluções da equação acima é igual ao número de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} + t \; = \; 30\,, \text{ com } 0 \leq t \leq 30\,.$$

Usando e técnica de palitinhos e sinais de mais, concluímos que o número de soluções é igual a $\frac{40!}{30!10!}$. Analogamente, o número de sacos com até 19 balas é igual a $\frac{29!}{19!10!}$. Logo, temos como resposta final $\dfrac{40!}{30!10!} - \dfrac{29!}{19!10!}$.

(4) Um certo jogo de *hexaminó* usa peças retangulares com seis números representados, que variam de 0 a 6 (veja figura abaixo). Quantas são as peças deste jogo?



Resposta: Considere $\mathrm{X} = \big\{(x_1,\dots,x_6) : \forall\, i = 1,\dots,6,\ x_i \in \{0,1,\dots,6\}\big\}$. Dois elementos em X serão equivalentes se um dos elementos puder ser obtido a partir do outro por uma rotação de $0°$ ou $180°$. Por exemplo, o elemento da figura é $(1,0,4,0,0,0)$, que é equivalente a si próprio e ao elemento $(0,0,0,4,0,1)$. Para que elemento $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ seja invariante por rotação de $180°$, é necessário e suficiente que $x_1 = x_6$, $x_2 = x_5$ e $x_3 = x_4$. Logo, de tamanho um, temos 7^3 classes de equivalência. E de tamanho dois, temos $\frac{7^6-7^3}{2}$ classes de equivalência. Logo, temos

$$7^3 + \frac{7^6 - 7^3}{2}$$

peças neste hexaminó.

(5) De quantas maneiras podemos pintar uma roleta de 10 compartimentos com n cores?

Resposta:

$$\frac{n}{1} + \frac{n^2-n}{2} + \frac{n^5-n}{5} + \frac{n^{10}-(n^5-n)-(n^2-n)-n}{10}.$$

(6) **(Extra 1pt)** Prove a identidade

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$$

via um argumento combinatório.

Resposta: Conte de quantas maneiras podemos escolher uma comissão com n pessoas numa sala com n torcedores do Bahia e n torcedores do Vitória, sendo que a comissão deve ter um chefe, e que este chefe deve ser torcedor do Vitória, digamos. Use que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ e, portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$