Lista 1 - MATA42 2017.2
Matemática Discreta I
Prof. Tertuliano Franco

Lógica

(1) Livro Judith Gersting. Páginas 16 a 25. Exercícios 3, 4, 12, 17, 18, 26, 27, 30, 54, 61-64.

(2) Livro Judith Gersting. Páginas 35 a 37. Exercícios 9-12, 13-42 e 43-50.

(3) Livro Judith Gersting. Páginas 50 a 52. Exercícios 1 a 20.

Tipos de Prova

Conjuntos, relações, relações de equivalência e funções

(1) Livro Haggard página 166, Seção 3.3.

(2) Livro Haggard página 188, Seção 3.7.

(3) Prove as Leis de Morgan para conjuntos.

(4) Mostre que $f^{-1}(\cup_\lambda A_\lambda) = \cup_\lambda f^{-1}(A_\lambda)$ e $f^{-1}(\cap_\lambda A_\lambda) = \cap_\lambda f^{-1}(A_\lambda)$.

(5) Defina a diferença simétrica $A\Delta B$. Mostre que a diferença simétrica é comutativa e associativa, e que a interseção é distributiva com respeito à diferença simétrica: $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

(6) Seja $A = \{a, b, c\}$. Construa uma relação em $A \times A$ que seja simétrica, mas não transitiva.

(7) Seja $A = \{a, b, c\}$. Construa uma relação em $A \times A$ que seja transitiva, mas não reflexiva.

(8) Seja $A = \{a, b, c\}$. Construa uma relação em $A \times A$ que seja reflexiva, mas não simétrica.

(9) Seja $A = \{a, b, c\}$. Construa uma relação em $A \times A$ que não seja uma função.

(10) Uma relação de equivalência em A pode ser uma função?

Números Naturais

(1) Prove o Princípio de Indução como consequência do Princípio da Boa Ordenação.

(2) A partir dos Axiomas de Peano, prove que $n + 1 = 1 + n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Enumerabilidade

(1) Mostre que o conjunto dos polinômios $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujos coeficientes são números racionais é um conjunto enumerável.

(2) Mostre que o conjunto dos números complexos é não-enumerável.

(3) Dê exemplo de uma sequência decrescente $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ de conjuntos infinitos cuja interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ é vazia.

(4) Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pondo $f(1, n) = 2n - 1$ e $f(m + 1, n) = 2^m(2n - 1)$. Mostre que f é uma bijeção.

(5) Prove que existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sobrejetiva tal que $g^{-1}(n)$ é infinito para cada $n \in \mathbb{N}$.

(6) Exprima $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$, onde os conjuntos A_i são disjuntos e infinitos.

(7) Mostre que o conjunto dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ é enumerável.

(8) Sejam Y enumerável e $fX \to Y$ tal que, para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ é enumerável. Mostre que X é enumerável.

(9) Um número $x \in \mathbb{R}$ é dito *algébrico* se é raiz de algum polinômio com coeficientes inteiros. Mostre que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Um número $x \in \mathbb{R}$ é dito *transcendente* se não é algébrico. Mostre que existem números transcendentes.

(10) Mostre que o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ é não enumerável.