Prova 1 - Gabarito Resumido
Mat. Discreta - MATA42 2017.2
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 1h50. Data 09/11/2017

Instruções: justifique suas respostas.

(1) 2pt. Negue a afirmação

$$\forall x \in X, \exists y \in Y \textbf{tal que } \Big(\big(\forall z \in Z, p(z) \neq q(x,y)\big) \textbf{ ou não vale que } p(x) \cdot r(z) \geq 2 \Big).$$

Resposta:

$$\exists x \in X \textbf{ tal que,} \forall y \in Y, \Big(\big(\exists z \in Z \textbf{ tal que } p(z) = q(x,y)\big) \textbf{ e } p(x) \cdot r(z) \geq 2 \Big).$$

(2) 2pt. Considere a relação $\mathcal{R} = \big\{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : (a > 0 \text{ e } b < 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ e } b > 0)\big\}$. Classifique esta relação como simétrica, antissimétrica, reflexiva, antirreflexiva, transitiva e/ou de equivalência.

Resposta: é simétrica, não é antissimétrica, não é reflexiva, é antirreflexiva, não é transitiva e não é de equivalência.

(3) 2pt. Prove por indução que $8^n - 1$ é múltiplo de 7 para todo $n \geq 0$.

Resposta: para $n = 0$, temos que $8^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ que é múltiplo de 7. Suponha que a afirmação seja válida para um certo n. Daí, $8^{n+1} - 1 = 8 \cdot 8^n - 1 = (7+1)8^n - 1 = 7 \cdot 8^n + (8^n - 1)$. Pela hipótese de indução, $8^n - 1$ é mútiplo de 7. Além disso, $7 \cdot 8^n$ é claramente múltiplo de 7. Logo, $7 \cdot 8^n + (8^n - 1)$ é múltiplo de 7 e, portanto, $8^{n+1} - 1$ é múltiplo de 7. Assim, pelo Princípio de Indução, temos que $8^n - 1$ é múltiplo de 7 para todo $n \geq 0$.

(4) 2pt. Seja $q \neq 1$. Prove por indução a fórmula para a soma de uma progressão geométrica:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \forall n \geq 1.$$

Resposta: para $n = 1$, temos que $1 = \frac{1-q^1}{1-q}$. Suponha a afirmação válida para um certo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Somando q^n a ambos os membros da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n &= \frac{1 - q^n}{1 - q} + q^n = \frac{1 - q^n + q^n(1-q)}{1-q} \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \end{aligned}$$

que é a mesma igualdade para $n+1$. Portanto, pelo Princípio de Indução, concluímos que

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \; = \; \frac{1-q^n}{1-q}\,, \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

(5) 2pt. Seja $N \geq 1$. Prove por indução que

$$\Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^n \; > \; \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^{n-1} - \frac{1}{N}$$

para todo $n \geq 2$.

Resposta: Para $n = 2$, temos que

$$\Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^2 \; = \; 1 - \frac{2}{N} + \frac{1}{N^2} \; > \; 1 - \frac{2}{N} \; = \; \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^{2-1} - \frac{1}{N}\,,$$

o que nos dá a base de indução. Suponha que a desigualdade seja válida para um certo n, ou seja, suponha que

$$\Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^n \; > \; \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^{n-1} - \frac{1}{N}\,.$$

Multiplicando ambos os membros por $1 - \frac{1}{N}$, que é um número positivo, obtemos

$$\begin{aligned} \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^{n+1} \; &> \; \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^n - \frac{1}{N}\Big(1 - \frac{1}{N}\Big) \\ &= \; \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^n - \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} \\ &> \; \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^n - \frac{1}{N}\,. \end{aligned}$$

Portanto, $\Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^{n+1} > \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^n - \frac{1}{N}$. Assim, pelo Princípio de Indução, temos que

$$\Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^n \; > \; \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^{n-1} - \frac{1}{N}, \quad \forall\, n \geq 2.$$

(6) 1pt (extra). Qual o fecho transitivo da relação $\mathcal{R} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| < 2\big\}$? **Resposta:** o fecho transitivo de uma relação $\mathcal{R}$ é a menor relação $\overline{\mathcal{R}}$ que contém $\mathcal{R}$ e é transitiva. Seja $\overline{\mathcal{R}}$ o fecho transitivo de $\mathcal{R}$, e sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Digamos que $a < b$. Existem pontos $a = x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ tais que $|x_i - x_j| < 2$. Como $\mathcal{R} \subset \overline{\mathcal{R}}$, temos que $(x_i, x_j) \in \mathcal{R}$ e, portanto, $(x_i, x_j) \in \overline{\mathcal{R}}$. E como $\overline{\mathcal{R}}$ é transitiva, concluímos que $(a, b) \in \mathcal{R}$. Para $a \geq b$ o argumento é análogo. Ou seja, concluímos que $(a, b) \in \overline{\mathcal{R}}$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$. Logo, o fecho transitivo de $\mathcal{R}$ é dado por $\overline{\mathcal{R}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.