Prova 3 - MAT562 2016.1
Probabilidade
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 3h. Data 08/07/2016

1. **[2,5 pt]**

   (a) Mostre que $X_n \xrightarrow{P} X$ implica $X_n \xrightarrow{d} X$.

   (b) Mostre que $X_n \xrightarrow{d} X$ não implica $X_n \xrightarrow{P} X$.

   (c) Seja $c \in \mathbb{R}$. Mostre que $X_n \xrightarrow{d} c$ se, e somente se, $X_n \xrightarrow{P} c$.

   (d) Sejam $c_n, c \in \mathbb{R}$. Mostre que se $X_n \xrightarrow{d} X$ e $c_n \to o$, então $c_n X_n \xrightarrow{P} 0$.

2. **[2,5 pt]**

   (a) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ iid $\sim N(0,1)$. Calcule a distribuição de

   $$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

   (b) Sem invocar a Lei Fraca (ou Forte) dos Grandes Números, mostre que

   $$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{P} 0\,.$$

3. **[2,5 pt]** Sejam $X_i$ iid com distribuição Cauchy-Padrão, ou seja, têm função característica $\phi(t) = e^{-|t|}$. Qual o limite de

   $$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

   e em qual sentido?

4. **[2,5 pt] (Valores Extremos)**
   Sejam $X_1, X_2, \ldots$ iid. Defina

   $$M_n \;=\; \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\,.$$

   Mostre que

   (a) Se $X_i \sim \exp(1)$, então $M_n - \log n \xrightarrow{d} X$, onde $X$ tem função de distribuição

   $$F_X(x) \;=\; \exp\big(-e^{-x}\big)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   (b) Se $F_{X_i}(x) = 1 - x^{-\alpha}$ para $x \geq 1$, com $\alpha > 0$, então $M_n/n^{\frac{1}{\alpha}} \xrightarrow{d} X$, onde $X$ tem função de distribuição

   $$F_X(x) \;=\; \exp\big(-x^{-\alpha}\big)\,, \quad \forall x > 0.$$

   (c) Se $F_{X_i}(x) = 1 - |x|^{\beta}$ para $-1 \leq x \leq 0$, com $\beta > 0$, então $n^{\frac{1}{\beta}} M_n \xrightarrow{d} X$, onde $X$ tem função de distribuição

   $$F_X(x) \;=\; \exp\big(-|x|^{\beta}\big)\,, \quad \forall x < 0.$$