Prova 2 (Segunda Parte)
Probabilidade - MAT562 2016.1
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 1h30. Data 14/04/2016

1. Sejam $X_n \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{\sqrt{n}})$ independentes. Mostre que

   (a) $\mathbb{P}\big[X_n = 1 \;\text{ infinitas vezes }\big] = 1\,.$

   (b) $\mathbb{P}\big[[X_n = 1] \cap [X_{n+1} = 1] \;\text{ infinitas vezes }\big] = 1\,.$

   (c) $\mathbb{P}\big[[X_n = 1] \cap [X_{n+1} = 1] \cap [X_{n+2} = 1] \;\text{ infinitas vezes }\big] = 0\,.$

2. **(A Agulha de Buffon)**

   (a) Considere infinitas retas paralelas no plano $\mathbb{R}^2$, de tal maneira que a distância entre duas retas vizinhas seja sempre d. Joga-se no plano $\mathbb{R}^2$, de maneira uniforme, uma agulha de comprimento ℓ, sendo $\ell < d$. Mostre que a probabilidade de que a agulha corte alguma dessas retas é igual a

   $$\frac{2\ell}{d\pi}.$$

   Sugestão: integre primeiro no ângulo e depois no comprimento (a outra ordem de integração daria muito mais trabalho).

   (b) Explique (justificando) como podemos usar esse fato para calcular numericamente o valor de π.

3. Sejam X_1, X_2,... variáveis aleatórias i.i.d limitadas, ou seja, $|X_i| \leq c$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Seja $\varepsilon > 0$. Mostre que para todo $\lambda > 0$,

   $$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}\big[\tfrac{S_n}{n} \geq \varepsilon\big] \;\leq\; -\lambda\varepsilon + \log \mathbb{E}\big[e^{\lambda X_1}\big]\,.$$

4. Como podemos usar a Questão 3 para estimar o erro no cálculo de π na Questão 2?

5. **Extra 1pt + maçã.** Como usar um computador para simular a Agulha de Buffon? (e portanto calcular π bem rápido).