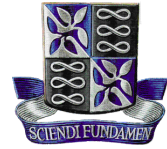




Prova 2 (Primeira Parte)  
Probabilidade - MAT562 2016.1  
Prof. Tertuliano Franco  
Duração: 1h30. Data 14/04/2016



**Instruções:** Escolha quatro dentre as cinco questões abaixo. Cada questão vale 1,25.

1. Sejam  $X, Y$  tais que  $\mathbb{E}X^2 < \infty$  e  $\mathbb{E}Y^2 < \infty$ . Mostre que

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, \mathbb{E}[Y|X]).$$

2. Para  $\alpha > 0$ , considere a função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\alpha}, & \text{se } x \geq 2, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right), & \text{se } 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Se  $X$  é v.a. com função de distribuição  $F$ , calcule  $\mathbb{E}X$  em função de  $\alpha$ .

3. Calcule a esperança condicional de  $\cos(XY)$  dado  $Y$ , onde  $X, Y$  são i.i.d.  $U[0, 1]$ .
4. Calcule a distribuição condicional de  $X$  dado  $|X|$ , supondo que  $X$  tem densidade contínua  $f$ .
5. A média harmônica de  $x_1, \dots, x_n > 0$  é definida por

$$M_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

Sejam  $X_i$  i.i.d. com função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\alpha}, & \text{se } x \geq 2, \\ 0, & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

Para quais valores de  $\alpha$  a média harmônica  $M_n(X_1, \dots, X_n)$  converge? Em qual sentido? Para qual valor?