



Prova 1 - MAT562 2016.1  
Probabilidade  
Prof. Tertuliano Franco  
Duração: 3h. Data 12/04/2016



1. **[2,5 pt]** Um paciente tem consultas com vários médicos na sequência  $A_1, A_2 \dots$ . O médico  $A_1$  mata 1 em cada 100 pacientes, o médico  $A_2$  mata 1 em cada 99, o médico  $A_3$  mata 1 em cada 98, ... até o médico  $A_{50}$ , que mata 1 em cada 51. Considere os médicos independentes.
  - (a) Qual a probabilidade do paciente vir a óbito?
  - (b) Dado que o paciente não escapou vivo, qual a probabilidade de ter morrido na 1ª consulta?
2. **[2,5 pt]** Seja  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade e  $A_n, B_n \in \mathbb{A}$  tais que  $\mathbb{P}(A_n) \rightarrow 1$  e  $\mathbb{P}(B_n) \rightarrow p$ . Mostre que

$$\mathbb{P}(A_n \setminus B_n) \rightarrow 1 - p.$$

3. **[2,5 pt]** Sejam  $X, Y$  independentes com distribuição  $\exp(\lambda)$ , com  $\lambda > 0$ . Mostre que  $\frac{X}{X+Y} \sim U[0, 1]$ .
4. **[2,5 pt]** Uma lâmpada está acesa no tempo  $t = 0$ . Para  $t > 0$ , seja  $Q(t + \Delta t | t)$  a probabilidade condicional da lâmpada queimar até  $t + \Delta t$  dado que estava acesa no tempo  $t$ . Suponha que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t | t) - Q(t | t)}{\Delta t} = f(t).$$

Seja  $X =$  tempo em que a lâmpada queima. Encontre  $f(t)$  tal que  $X \sim \exp(\lambda)$ .

5. **[Extra: 2 pt]** O campeonato baiano tem 16 times, e é feito em eliminatória (não há empates). São feitos inicialmente 8 jogos, os vencedores passam para a próxima rodada e assim por diante. Cada jogo é independente com probabilidade  $1/2$  para cada resultado. Os pares iniciais também são escolhidos ao acaso. Qual a probabilidade do Vitória ser campeão e não ter jogado com o Bahia? Sugestão: a solução é curta.