MAT B31 PROVA 1 2016.1

Análise Combinatória

Gabarito Resumido

① $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

② $\frac{15!}{15} - \frac{14!}{14} \cdot 2$

③ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq k$

Para resolver isso, façamos

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = l \\ 0 \leq l \leq k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + (k-l) = k \\ x_1, \dots, x_5 \geq 0 \quad k-l \geq 0 \end{cases}$$

$k - l = j$

Daí, $x_1 + \dots + x_5 + j = k$, que tem

$\frac{(k+5)!}{k!\,5!}$ soluções

Resposta: $\frac{(61+5)!}{61!\,5!} - \frac{(21+5)!}{21!\,5!} = \binom{66}{5} - \binom{26}{5}$

(4) Façamos uma relação de equivalência sobre $X = \{(a,b,c) ; a,b,c \in \{0,\dots,6\}\}$.

Temos que $|X| = 7^3$

Impomos $(a,b,c) \sim (m,n,p)$ se $a = p$, $c = m$ e $b = n$, pois, por exemplo,

$$\boxed{\cdot \mid \quad \mid \cdots} = \boxed{\cdots \mid \quad \mid \cdot}$$

Classes de equivalência do tamanho 1 = todas da forma

$$\boxed{a \mid b \mid a}$$

Logo, há um total de 7^2.

Classes de equivalência do tamanho 2:

$$\frac{7^3 - 7^2}{2} = 147$$

Total $= 49 + 147 = 196$

(5)

F_1	F_2	F_3
	B_2	
B_1		B_3

A_1 = equipe 1 tem seus 3 carros na mesma linha

⋮

A_4 = equipe 4 tem seus 3 carros na mesma linha

$$|A_1| = 4\cdot(3!)\,(3!)^3\cdot(3!)^3$$

$$|A_1\cap A_2| = 4\cdot 3\cdot(3!)^2\cdot(2!)^3\,(3!)^2$$

Temos que $A_1\cap A_2\cap A_3 = A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4$.

Daí, basta calcular este último:

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| = 4!\,(3!)^4$$

Resposta:

$$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4| = 4\cdot|A_1| - \binom{4}{2}|A_1\cap A_2| + \binom{4}{3}|A_1\cap A_2\cap A_3| - |A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|$$

$$= 4\cdot 4\cdot(3!)^7 - 6\cdot 4\cdot 3\cdot(3!)^4\cdot 2^3 + 3\cdot 4!\,(3!)^4$$

$$= 16\cdot 6^7 - 6\cdot 4\cdot 3\cdot 6^4\cdot 8 + 3\cdot 24\cdot 6^4$$

$$= 3.825.792$$