# Exercícios

1. Uma quantia depositada no dia 1º do mês $i$ numa caderneta de poupança é corrigida monetariamente pela taxa $t_i$ e acrescida de 1% de juros no dia 1º do mês $i+1$. Supondo que o primeiro (e único) depósito de R\$ 200,00 é feito no dia 1º de março (= mês 1), monte a relação de recorrência para $Q_n$, a quantia disponível no dia 1º do mês $n$, e utilize-a para calcular $Q_5$, supondo que $t_1 = 30\%$, $t_2 = 35\%$, $t_3 = 32\%$ e $t_4 = 40\%$.

2. Resolver as seguintes relações de recorrência:

   (a) $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$, para $n \geq 2$, $a_0 = 8$ e $a_1 = 10$;

   (b) $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + 3a_{n-3}$, para $n \geq 3$, $a_0 = 3$, $a_1 = 3$ e $a_2 = 7$;

   (c) $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$, para $n \geq 4$, $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$ e $a_3 = \gamma$;

   (d) $a_n = 2(\cos\alpha)a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 3$, $a_1 = \cos\alpha$ e $a_2 = \cos 2\alpha$.

3. Resolver as seguintes relações de recorrência:

   (a) $a_n = 2a_{n-1} + n^2$, para $n \geq 1$, $a_0 = 1$;

   (b) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2n + 1$, para $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$;

   (c) $a_n = -2a_{n-1} + 8a_{n-2} + \frac{27}{25}5^n$, para $n \geq 2$, $a_0 = 0$ e $a_1 = -9$;

   (d) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} + 6n^2 - 40n + 49$, para $n \geq 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = 15$ e $a_3 = 41$.

4. Seja $a_n$ o número de regiões ilimitadas ...



5. Ache uma relação de recorrência e a solução correspondente para $a_n$, o número de seqüências quinárias que contêm pelo menos um 2 e este 2 ocorre antes do primeiro 0, se houver 0's na seqüência.

6. Se a equação de recorrência $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ tem solução da forma $A3^n + B6^n$, ache as constantes $c_1$ e $c_2$.

7. Monte uma relação de recorrência e resolva-a para $C_n$, o número de regiões em que o plano é dividido por $n$ círculos que se interceptam dois a dois, tais que a interseção de três ou mais círculos é vazia.

8. Será possível representar os 16 subconjuntos que podem ser obtidos da combinação de quatro conjuntos $A$, $B$, $C$ e $D$ (cada subconjunto é definido estabelecendo-se quatro condições para seus elementos: pertencer ou não a cada um dos quatro conjuntos, daí termos 16 subconjuntos) por meio de um diagrama de Venn em que cada um dos quatro conjuntos é representado pela região no interior de um círculo? Por quê?

9. Considere o experimento de lançar uma moeda repetidamente até se obter duas caras seguidas. Obtenha e resolva uma relação de recorrência para $a_n$, o número de experimentos para os quais duas caras sucessivas são obtidas até o $n^{\underline{\text{ésimo}}}$ lançamento.

10. Em quantas regiões o plano é dividido por $n$ linhas que se cruzam num mesmo ponto?

11. Monte e resolva uma relação de recorrência para $a_n$, o número de regiões em que uma esfera é dividida por $n$ planos que se in-

dividido por $n$ planos. Suponha que não exista nenhum grupo de três planos com uma reta em comum.

13. Seja $a_n$ o número de permutações dos $n$ primeiros números naturais tais que cada elemento difere de uma unidade de algum elemento à sua esquerda na permutação. Construa e resolva uma relação de recorrência para $a_n$.

14. Uma Torre de Hanoi dupla contém $2n$ discos de $n$ tamanhos diferentes, dois de cada tamanho. As regras de movimentação dos discos são as mesmas: um disco de cada vez e nunca colocar um disco sobre outro menor.

   (a) Quantos movimentos são necessários para transferir a torre dupla de um eixo para outro, supondo que discos de mesmo tamanho sejam idênticos? Monte e resolva a relação de recorrência apropriada.

   (b) Suponha agora que discos de mesmo tamanho são pintados com cores diferentes e o objetivo é transferir a torre mantendo a ordem de cores. (Dica: utilize os resultados do item anterior.)

15. Ache fórmulas fechadas para $\triangle_j$ para $\ell = 2, 3, 4$ e 5 (ver notação à página 256), usando, em todos os casos, dois métodos: o da seção 2.2 e o da seção 2.3.

16. Monte uma relação de recorrência para o número de amostras de $k$ elementos dos dígitos 1, 2, ..., $n$, nas quais os números pares ocupam as posições pares, os números ímpares ocupam as



17. Resolva o sistema de relações de recorrência:

$$a_1 = b_1 = c_1 = 1,$$
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}, \\ b_n = 4^{n-1} - c_{n-1}, \\ c_n = 4^{n-1} - b_{n-1}, \end{cases} \quad \text{para } n \geq 2$$

18. Resolva o sistema de relações de recorrência:

$$a_0 = -1,\ b_0 = 2$$
$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}, \\ b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}, \end{cases} \quad \text{para } n \geq 1.$$

19. Os tíquetes de loteria da Eslovênia são identificados por números de 6 dígitos (de 000.000 a 999.999). Há uma crença popular de que os tíquetes cuja soma dos dígitos nas posições pares é igual à dos dígitos nas posições ímpares têm mais chance de serem sorteados. Calcule quantos tíquetes existem satisfazendo esta propriedade. (Dica: estabeleça uma relação de recorrência para $a_{k,n}$, o número de maneiras de escrever $n$ como a soma de $k$ parcelas, onde cada parcela é um número entre 0 e 9. O número de tíquetes "sortudos" é então $\sum_{n=0}^{27} a_{3,n}^2$.)

20. Ache uma relação de recorrência para $a_n$, o número de maneiras de formar $n$ pares de $2n$ jogadores de tênis. Ache uma fórmula para $a_n$ resolvendo a relação. (Sugestão: use substituição para calcular $a_n$ para valores pequenos de $n$, identifique um padrão e demonstre que é válido usando o princípio de indução.)

21. Uma seqüência binária é examinada para detecção de certos padrões. Cada vez que um padrão é detectado, a pesquisa é rei-

de seqüências binárias de $n$ dígitos que contêm o padrão 010 ocorrendo no $n^{\underline{\text{ésimo}}}$ dígito.

22. Monte uma relação de recorrência para o número $a_n$ de seqüências ternárias com $n$ dígitos para as quais o padrão 012 ocorre só uma vez, no final da seqüência.

23. Ache uma relação de recorrência para $a_{n,k}$, o número de maneiras de escolher $k$ objetos dentre $n$ tipos de objetos, admitindo-se que existe um estoque ilimitado de cada tipo de objeto. Ache uma equação para $f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}x^k$ e resolva-a, identificando um padrão e aplicando indução. Obtenha $a_{n,k}$ a partir da expansão em série de $f_n(x)$.

24. Seja $Y_t$ a renda nacional no tempo $t$. A seguinte equação de recorrência foi obtida para $Y_t$ a partir de teorias econômicas:

$$Y_t = \alpha(1+\beta)Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2} + 1, \qquad \text{para } t \geq 2,$$

onde $\alpha$ e $\beta$ são constantes positivas. Supondo $Y_0 = 2$, $Y_1 = 3$, $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = 1$, ache a função geradora da seqüência $(Y_t)$.

25. Mostre que os números de Fibonacci satisfazem à igualdade abaixo para $n \geq 1$:

$$F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k}.$$

(Dica: use a fórmula para a função geradora mas não calcule a expansão em frações parciais.)

26. Deseja-se calcular o produto $a_1a_2a_3\cdots a_n$. Trata-se, no entanto, de um tipo especial de produto, no qual a ordem importa, ou seja, não temos necessariamente que $a_1a_2 = a_2a_1$. Isto ocorre,



$a_2a_1$ não esteja definido. Existem várias maneiras de calcular este produto, determinadas pela ordem de cálculos escolhida. Esta ordem pode ser indicada por meio de parênteses. Para $n = 3$ temos, por exemplo, as seguintes possibilidades: $((a_1a_2)a_3)$ e $(a_1(a_2a_3))$. Monte e resolva uma relação de recorrência para $p_n$, o número de maneiras de calcular o produto de $n$ termos mencionado no início do enunciado.

27. Seja $a_n$ o número de maneiras de distribuir $n$ casais em torno de uma mesa redonda, de maneira que homens e mulheres se alternem na distribuição e marido e mulher não sejam vizinhos. Deduza um sistema de relações de recorrência apropriado para $a_n$, definindo as outras seqüências que forem necessárias.

28. Seja $M_n$ o número de maneiras de arrumar $n$ casais em fila de modo que nenhum casal ocupe posições adjacentes. Estabeleça um sistema de relações de recorrência para $M_n$ e outras seqüências que se mostrem necessárias.