Prova 3 - MAT562 2015.2
Probabilidade
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 3h. Data 17/12/2015

1. [1,5 pt] Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $\mathbb{P}[X_n=-1]=\mathbb{P}[X_n=1]=\frac{1}{2}$ e seja

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{2^k}.$$

Mostre que $Y_n \xrightarrow{\text{d}} \text{U}[-1,1]$.

2. [1,5 pt] Mostre que se $X_n \xrightarrow{\text{d}} N(0,1)$, $Y_n \xrightarrow{\text{d}} N(0,1)$, e X_n é independente de Y_n para todo $n\in\mathbb{N}$, então $X_n+Y_n \xrightarrow{\text{d}} N(0,2)$.

3. [2 pt]

   (a) Prove que $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$ implica em $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$.

   (b) Prove que se $X_n \xrightarrow{\text{d}} c$, onde c é uma constante, então $X_n \xrightarrow{\text{P}} c$.

4. [1,5 pt] Seja $X_n\sim \text{Bin}(n,p_n)$, onde p_n é tal que $np_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$, $0<\lambda<\infty$. Mostre que $X_n \xrightarrow{\text{d}} \text{Poisson}(\lambda)$.

5. [1,5 pt] Seja $X\sim\exp(\lambda)$. Usando funções características, deduza uma fórmula geral para $\mathbb{E}X^k$, com $k\in\mathbb{N}$.

6. [2 pt] Suponha que X_i são i.i.d., $X_i>0$, $\mathbb{E}X_i=5$ e $\mathbb{E}X_i^2=3$, $\mathbb{E}X_i^4=7$. Calcule o limite em distribuição de

$$\frac{\big(X_1^2+\cdots+X_n^2\big)-3n}{\sqrt[3]{\big(X_1+\cdots+X_n\big)}}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{n}}.$$