



Prova 2 - MAT562 2015.2
Probabilidade
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 3h. Data 12/11/2015



1. **[2,5pt]** Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $X_1 \sim U[0, 1]$.

(a) Prove que $n^{-X_n} \rightarrow 0$ em probabilidade;

(b) Prove que n^{-X_n} não converge quase certamente para zero.

2. **[2,5pt]** Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes com distribuição $N(0,1)$. Determine (justificando) qual o limite quase certo de

$$\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{(X_1 - c)^2 + \dots + (X_n - c)^2}$$

3. **[2,5pt]** Sejam X_1, X_2, \dots com distribuição $U[0, 1]$. Encontre o limite quase certo da média geométrica

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

4. **[2,5pt]** Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes, $X_n \sim U[0, n^2]$. Dizemos que há *sucesso* no n -ésimo ensaio se $X_{2n+1} < X_{2n}$ e *fracasso* se $X_{2n+1} > X_{2n}$. Seja S_n o número de sucessos até o n -ésimo ensaio. Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \infty$.